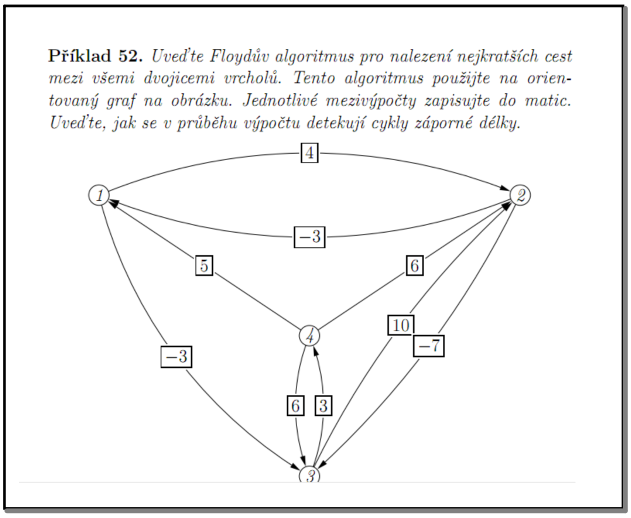
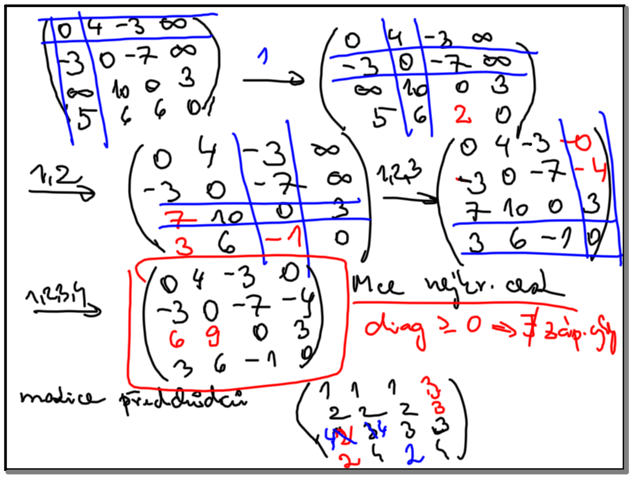
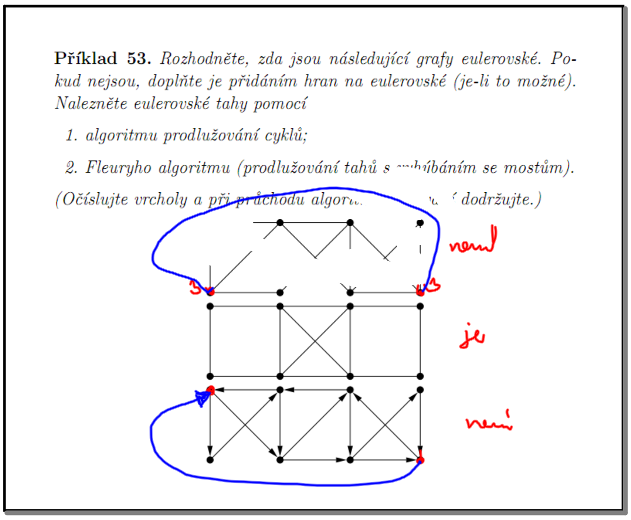


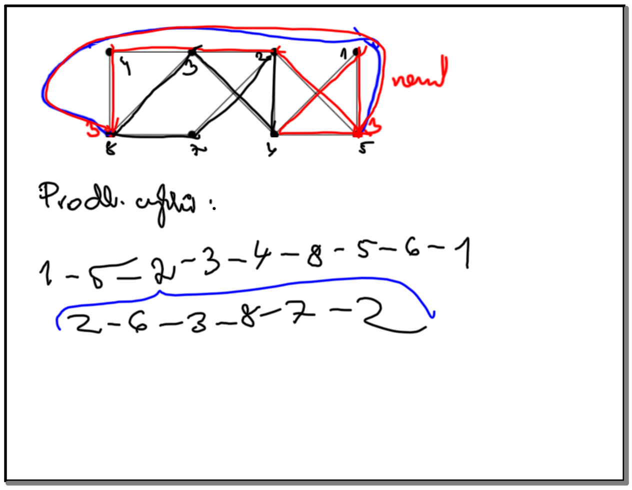
11 18-16:55



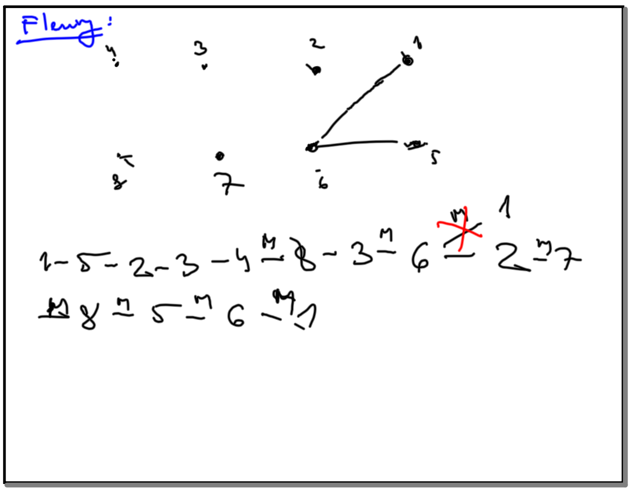
11 18-17:06



11 18-16:56



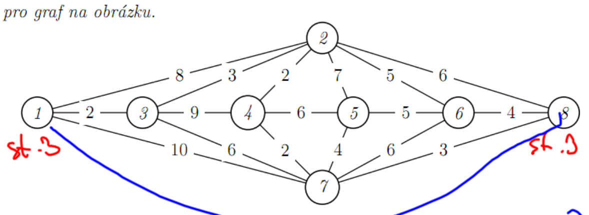
11 18-17:37



11 18-16:58

11 18-17:37

Příklad 54. *Problém čínského pošťáka v hranově ohodnoceném neorientovaném grafu je problémem nalezení nejkratšího uzavřeného sledu, který obsahuje každou hranu v grafu. Nalezněte řešení tohoto problému pro graf na obrázku.*



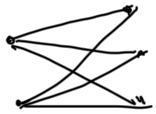
délka nejkr. cesty 11 (1-3-2-8)

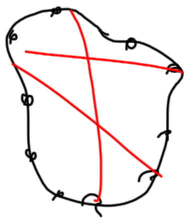
11 18-16:56

Příklad 55 (Nutná podmínka toho, aby graf mohl být hamiltonovský). *Je-li $G = (V, E)$ hamiltonovský a $\emptyset \neq W \subsetneq V$, pak $G \setminus W$ má nejvýše $|W|$ komponent souvislosti.*

Ukažte na konkrétním příkladu grafu, že opak obecně neplatí.

$K_{2,3}$ není hamiltonovský





nemá artikulace

(není obecný protipříklad?)

($K_{m,n}$ je hamiltonovský $\Leftrightarrow m = n$)

11 18-16:56

Příklad 56 (Postačující podmínky pro to, aby graf byl hamiltonovský).

Dirac: stupeň každého vrcholu je aspoň $|V|/2$.

Ore: součet stupňů libovolných dvou nesousedních vrcholů je aspoň $|V|$.

Bondy-Chvátal: G je hamiltonovský právě když $G + uv$ je hamiltonovský (u, v jsou nesousední vrcholy, jejichž součet stupňů je aspoň $|V|$ – opakováním přidáváním takových hran, dokud to jde, získáme tzv. uzávěr grafu $cl(G)$).

1. *Dokažte, že z Bondy-Chvátalovy věty plyne Oreho a z ní Diracova.*
2. *Udejte příklad hamiltonovského grafu, který splňuje podmínku Oreho věty ale ne věty Diracovy.*
3. *Udejte příklad hamiltonovského grafu, jehož uzávěr není úplný graf.*

Ore $\Rightarrow$ Dirac: $\forall v: st\, v \geq \frac{n}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall u, v: st\, u + st\, v \geq n$

$\Rightarrow \forall$ nesous. $u, v: st\, u + st\, v \geq n \overset{\text{Ore}}{\Rightarrow} G$ ham.

11 18-16:56

Bondy-Chvátal $\Rightarrow$ Ore:

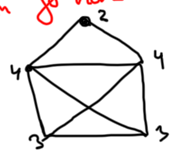
$\forall u, v: \{u, v\} \in E \vee st\, u + st\, v \geq n$

$\Rightarrow cl(G) = K_n$

B-Ch $\Rightarrow$ G je ham. $\Leftrightarrow$ $cl(G) = K_n$ je ham.

ale K_n je hamiltonovský

ad 2.

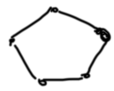


neplatí: $\forall v: st\, v \geq \frac{5}{2}$

ale $\forall u, v: st\, u + st\, v \geq 5$

$st\, u + st\, v = 4$

ad 3. $C_n, n > 4$ $G =$

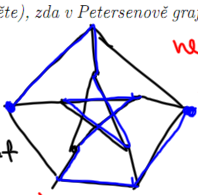


$\Rightarrow cl(G) = G$

11 18-18:04

Příklad 57. *Rozhodněte (a zdůvodněte), zda v Petersenově grafu existuje*

1. *hamiltonovská cesta,*
2. *hamiltonovská kružnice.*

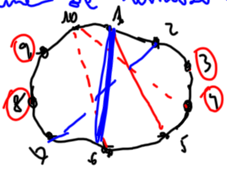


nejkr. kružnice je délky 5!

3-regulární (kubický) graf

ad 2. ham. kružnice neexistuje

Buď G kubický graf, $|G| = 10$, když je ham., ukážeme že nemůže být Petersenův.



+ 5 hran

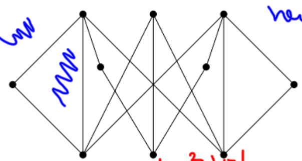
zkoumáme nejkr. kružnice

11 18-16:57

Kuratowski

G je rovinný $\Leftrightarrow$ žádný podgraf není dělením K_5 ani $K_{3,3}$

Příklad 58. *Rozhodněte, zda je daný graf*



rovinný. Zdůvodněte.

NENÍ

dělení $K_{3,3}$

$|V| + \frac{2}{3}|E|$

Eulerův vztah: $|V| + |S| = |E| + 2$.

$\sum 1 = 2|E|$

(hrana, stěna)

$\geq 3|S|$

$|V| - 2 \geq \frac{1}{3}|E|$

$\boxed{|E| \leq 3|V| - 6}$

11 18-16:57

Příklad 59. *Rozhodněte, zda existuje graf mající skóre* (6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8). *Pokud ano, existuje i rovinný graf daného skóre?*

ANO

$\Sigma = 70$

(6,6,6,7,7,7,7,8,8,~~8~~)

(6,5,5,6,6,6,6,7,7) → (5,5,6,6,6,6,6,7,~~7~~)

(4,5,5,5,5,5,5,~~6~~)

(4,4,4,4,4,4,~~4~~)

(3,3,3,3,4,~~4~~)

(2,2,2,3,~~3~~)

(1,1,2,2)

$|E| \leq 3|V| - 6$

$|E| \leq 24$

$2|E| = \sum_{v \in V} st(v)$

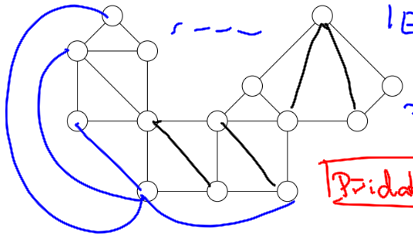
$\Rightarrow |E| = 35$

$35 \not\leq 24$

Rovinný neexistuje

11 18-16:57

Příklad 60. *Rozhodněte, zda je daný rovinný graf maximální. Doplňte co nejvíce hran při zachování rovinnosti.*



$|V| = 14$

$|E| = 20$

$3|V| - 6 = 36$ hran

Přidat lze 16 hran

maximální $\Leftrightarrow |E| = 3 \cdot |V| - 6$

(všechny stěny Δ)

11 18-16:57

Příklad 61. *Každé z následujících tvrzení dokažte nebo ukažde vhodný protipříklad.*

(a) *Každý graf s méně než 9 hranami je rovinný.*

(b) *Graf, který není rovinný, není hamiltonovský.*

(c) *Graf, který není rovinný, je hamiltonovský.*

(d) *Graf, který není rovinný, není eulerovský.*

(e) *Graf, který není rovinný, je eulerovský.*

(f) *Každý hamiltonovský graf je rovinný.*

(g) *Žádný hamiltonovský graf není rovinný.*

(h) *Každý eulerovský graf je rovinný.*

(i) *Žádný eulerovský graf není rovinný.*

11 18-16:57