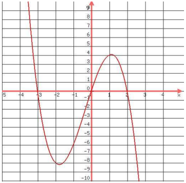
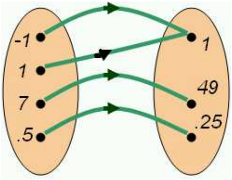
4 Relace a funkce, Ekvivalence

Nyní si podrobně rozebereme matematický aparát relací a funkcí, kterému se v jeho abstraktní podobě moc pozornosti ve středoškolské výuce nevěnuje – na rozdíl od naivního pohledu na množiny a na „funkce“ ve významu analytických funkcí (jako $x + 1$ či $\sin x$). Přitom na pojem relace velmi brzy narazí každý informatik už jen při studiu dat a databází a její abstraktní podobu bude potřebovat.





Stručný přehled lekce

* Co je relace a funkce. Reprezentace relací tabulkou a grafem.
* Základní vlastnosti binárních relací.
* Relace ekvivalence, jím odpovídající rozklady množin.

4.1 Relace a funkce nad množinami

Vedle množin dalším důležitým základním „datovým typem" matematiky jsou relace, kterým vzhledem k jejich rozsáhlému použití v informatice věnujeme významnou pozornost v této i dvou příštích lekcích.

Definice 4.1. **Relace** mezi množinami $A_1, \cdots, A_k$, pro $k \in \mathbb{N}$, je libovolná podmnožina kartézského součinu

$$R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_k \,. \square$$

Pokud $A_1 = \cdots = A_k = A$, hovoříme o *k-ární relaci R na A*. $\square$

Příklady relací.

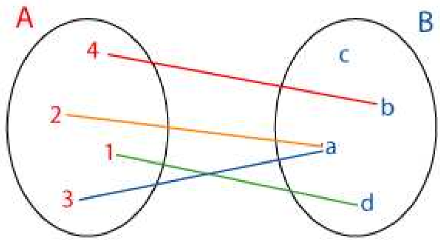
- $\{(1,a),(2,a)\}$ je relace mezi $\{1,2,3\}$ a $\{a,b\}$.
- $\{(i, 2\cdot i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ je *binární* relace na $\mathbb{N}$. $\square$
- $\{(i,j,i+j) \mid i,j \in \mathbb{N}\}$ je *ternární* relace na $\mathbb{N}$.
- $\{3\cdot i \mid i \in \mathbb{N}\}$ je *unární* relace na $\mathbb{N}$. $\square$
- Jaký význam vlastně mají unární a nulární relace na A?

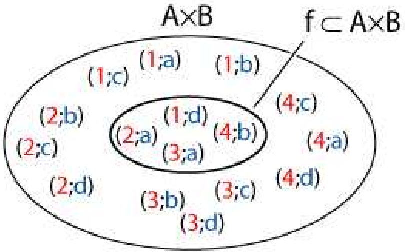
Funkce mezi množinami

Definice 4.2. **(Totální) funkce** z množiny A do množiny B je relace f mezi A a B taková, že pro každé $x \in A$ existuje právě jedno $y \in B$ takové, že $(x, y) \in f$. $\square$

Množina A se nazývá *definiční obor* a množina B *obor hodnot* funkce f.

Neformálně řečeno, ve funkci f je každé „vstupní" hodnotě x přiřazena jednoznačně „výstupní" hodnota y. (V obecné relaci počty „přiřazených" dvojic neomezujeme. . .)





Značení: Místo $(x, y) \in f$ píšeme obvykle $f(x) = y$.

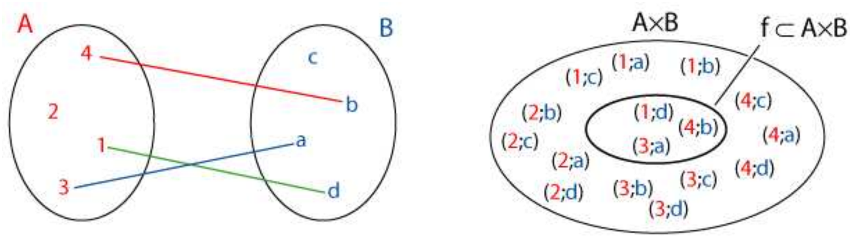
Zápis $f : A \to B$ říká, že f je funkce s def. oborem A a oborem hodnot B. □

Funkcím se také říká *zobrazení*.

Příklady funkcí jsou třeba následující.

- Definujeme funkci $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ předpisem $f(x) = x + 8$.
  Pak $f = \{(x, x + 8) \mid x \in \mathbb{N}\}$. □
- Definujeme funkci $plus : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ předpisem $plus(i, j) = i + j$.
  Pak $plus = \{(i, j, i + j) \mid i, j \in \mathbb{N}\}$.

Definice: Pokud naši Definici 4.2 upravíme tak, že požadujeme pro každé $x \in A$ nejvýše jedno $y \in B$ takové, že $(x, y) \in f$, obdržíme definici *parciální funkce* z A do B. $\square$



V parciální funkci f nemusí být pro některé „vstupní" hodnoty x funkční hodnota definována (viz například $f(2)$ v uvedeném obrázku).

Pro *nedefinovanou* hodnotu používáme znak $\perp$.

Následuje několik příkladů parciálních funkcí.

- Definujeme parciální funkci $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 3 + x & \text{jestliže } x \geq 0, \\ \perp & \text{jinak.} \end{cases}$$

  Tj. $f = \{(x, 3 + x) \mid x \in \mathbb{N}\}$. $\square$

- Také funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daná běžným analytickým předpisem

$$f(x) = \log x$$

  je jen parciální – není definována pro $x \leq 0$. $\square$

- Co je relace, přiřazující lidem v ČR jejich (česká) rodná čísla?

4.2 Reprezentace konečných relací

Příklad 4.3. *Tabulky relační databáze.*

Definujme následující množiny („elementární typy“)

- ZNAK $= \{a, \cdots, z, A, \cdots, Z, mezera\}$,
- CISLICE $= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. □

Dále definujeme tyto množiny („odvozené typy“)

- JMENO $=$ ZNAK^{15},   PRIJMENI $=$ ZNAK^{20},
- VEK $=$ CISLICE^{3},
- ZAMESTNANEC $\sim$ JMENO $\times$ PRIJMENI $\times$ VEK. □

Relaci „typu“ ZAMESTNANEC pak lze reprezentovat tabulkou:

JMENO	PRIJMENI	VEK
Jan	Novák	42
Petr	Vichr	28
Pavel	Zíma	26
Stanislav	Novotný	52

□

Poznámka: *Relační databáze* je konečná množina tabulek. *Schéma databáze* je (zjednodušeně řečeno) množina „typů“ jednotlivých tabulek.

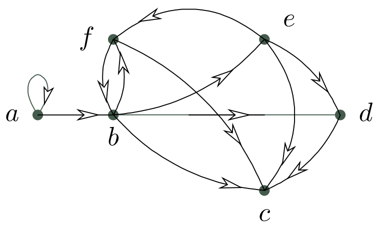
Reprezentace binárních relací na množině

Značení: Binární relaci $R \subseteq M \times M$ lze jednoznačně znázornit jejím *grafem*:

- Prvky M znázorníme jako body v rovině.
- Prvek $(a, b) \in R$ znázorníme jako *orientovanou hranu* („šipku“) z a do b. Je-li $a = b$, pak je touto hranou „smyčka“ na a. □

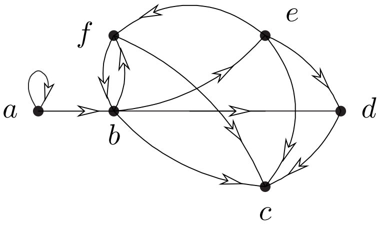
Pozor, nejedná se o „grafy funkcí“ známé z matematické analýzy. □

Například mějme $M = \{a, b, c, d, e, f\}$ a $R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (b, d), (b, e), (b, f), (d, c), (e, c), (f, c), (e, d), (e, f), (f, b)\}$, pak:



V případě, že M je nekonečná nebo „velká“, může být reprezentace R jejím grafem nepraktická (záleží také na míře „pravidelnosti“ R).

Značení: Binární relaci $R \subseteq M \times M$ lze jednoznačně zapsat také pomocí *matice* relace – matice $\boldsymbol{A}$ typu $M \times M$ s hodnotami z $\{0,1\}$.



$$\rightarrow \quad \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}$$

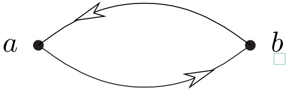
4.3 Vlastnosti binárních relací

Definice 4.4. Nechť $R \subseteq M \times M$. Binární relace R je

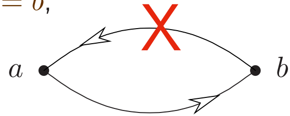
- *reflexivní*, právě když pro každé $a \in M$ platí $(a, a) \in R$;

- *ireflexivní*, právě když pro každé $a \in M$ platí $(a, a) \notin R$;

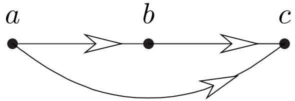
- *symetrická*, právě když pro každé $a, b \in M$ platí, že jestliže $(a, b) \in R$, pak také $(b, a) \in R$;



- *antisymetrická*, právě když pro každé $a, b \in M$ platí, že jestliže $(a, b), (b, a) \in R$, pak $a = b$;



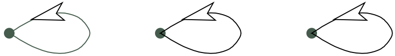
- *tranzitivní*, právě když pro každé $a, b, c \in M$ platí, že jestliže $(a, b), (b, c) \in R$, pak také $(a, c) \in R$.



Následují dva základní typy binárních relací; kde R je

- relace *ekvivalence*, právě když je R reflexivní, symetrická a tranzitivní;
- *částečné uspořádání*, právě když je R reflexivní, antisymetrická a tranzitivní (často říkáme jen *uspořádání*).

Pozor, může být relace symetrická i antisymetrická zároveň? Ano!



Ukázkové binární relace

Příklad 4.5. *Několik příkladů relací definovaných v přirozeném jazyce.*

Nechť M je množina všech studentů 1. ročníku FI. Uvažme postupně relace $R \subseteq M \times M$ definované takto

- $(x, y) \in R$ právě když x a y mají stejné rodné číslo; □
- $(x, y) \in R$ právě když x má stejnou výšku jako y (dejme t. na celé mm); □
- $(x, y) \in R$ právě když výška x a y se neliší více jak o 2 mm; □
- $(x, y) \in R$ právě když x má alespoň takovou výšku jako y; □
- $(x, y) \in R$ právě když x má jinou výšku než y (dejme tomu na celé mm); □
- $(x, y) \in R$ právě když x je zamilován(a) do y. □

Které z nich tedy jsou ekvivalencí nebo uspořádáním? □

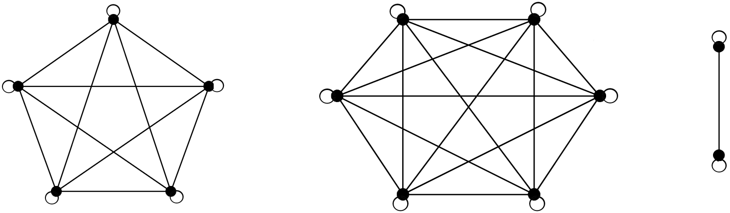
Příklad 4.6. *Jaké vlastnosti mají následující relace?*

- Buď $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definovaná takto $(x, y) \in R$ právě když x dělí y. (Částečné uspořádání, ale ne každá dvě čísla jsou porovnatelná.)
- Buď $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definovaná takto $(x, y) \in R$ právě když x a y mají stejný zbytek po dělení číslem 5. (Ekvivalence.)
- Nechť $F = \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ je množina funkcí. Buď $R \subseteq F \times F$ definovaná takto $(f, g) \in R$ právě když $f(x) < g(x)$ pro všechna x. (Ireflexivní, antisymetrická a tranzitivní, ale ne reflexivní – není uspořádáním.) $\square$

4.4 Relace ekvivalence

- Podle Definice 4.4 je relace $R \subseteq M \times M$ *ekvivalence* právě když R je reflexivní, symetrická a tranzitivní. Tyto tři vlastnosti tedy musí být splněny a ověřeny k důkazu toho, že daná relace R je ekvivalence.□

- Jak vypadá graf relace ekvivalence?□



- Neformálně řečeno; ekvivalence je relace $R \subseteq M \times M$, taková, že $(x, y) \in R$ právě když x a y jsou v nějakém smyslu „stejné“.

Další ukázkové binární relace

Příklad 4.7. *Nechť M je množina všech studentů 1. ročníku FI. Uvažme postupně relace $R \subseteq M \times M$ a zkoumejme, zda se jedná o ekvivalence:*

- $(x, y) \in R$ právě když x má stejnou výšku jako y;
- $(x, y) \in R$ právě když x má stejnou barvu vlasů jako y;
- $(x, y) \in R$ právě když x, y mají stejnou výšku a stejnou barvu vlasů;
- $(x, y) \in R$ právě když x, y mají stejnou výšku nebo stejnou barvu vlasů.

U kterého body se nejedná o relaci ekvivalence a proč?

Je to poslední případ, kdy není splněna tranzitivita! $\square$

Tvrzení 4.8. *Nechť R, S jsou dvě relace ekvivalence na stejné množině M. Pak jejich průnik $R \cap S$ je opět relací ekvivalence.*

Příklad 4.9. *Nechť* $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *je binární relace definovaná takto:* $(x, y) \in R$ *právě když* $|x - y|$ *je dělitelné třemi.*

V jakém smyslu jsou zde x a y „stejné“? □Dávají stejný zbytek po dělení třemi.
□ □

Příklad 4.10. *Buď* R *binární relace mezi všemi studenty na přednášce FI: IB000 definovaná takto:* $(x, y) \in R$ *právě když* x *i* y *sedí v první lavici.* □

Už na „první pohled“ jde o relaci symetrickou a tranzitivní. Proč se v tomto případě nejedná o relaci ekvivalence? □
Protože není reflexivní pro studenty sedící v dalších lavicích. (Takže si dávejte dobrý pozor na správné pochopení definic.) □

4.5 Rozklady a jejich vztah k ekvivalencím

Definice 4.11. Rozklad množiny. Nechť M je množina.
Rozklad (na) M je množina podmnožin $\mathcal{N} \subseteq 2^M$ splňující násl. tři podmínky:

- $\emptyset \notin \mathcal{N}$ (tj. každý prvek $\mathcal{N}$ je neprázdná podmnožina M);
- pokud $A, B \in \mathcal{N}$, pak buď $A = B$ nebo $A \cap B = \emptyset$;
- $\bigcup_{A \in \mathcal{N}} A = M$. □

Prvkům $\mathcal{N}$ se také říká *třídy rozkladu*.

- Buď $M = \{a, b, c, d\}$. Pak $\mathcal{N} = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}$ je rozklad na M. □
- Nechť $A_0 = \{k \in \mathbb{N} \mid k \bmod 3 = 0\}$, $A_1 = \{k \in \mathbb{N} \mid k \bmod 3 = 1\}$, $A_2 = \{k \in \mathbb{N} \mid k \bmod 3 = 2\}$.
  Pak $\mathcal{N} = \{A_0, A_1, A_2\}$ je rozklad všech přirozených čísel $\mathbb{N}$ podle zbytkových tříd. □

Každý rozklad $\mathcal{N}$ na M jednoznačně určuje jistou ekvivalenci $R_{\mathcal{N}}$ na M:

Věta 4.12. *Nechť M je množina a $\mathcal{N}$ rozklad na M. Nechť $R_{\mathcal{N}} \subseteq M \times M$ je relace na M definovaná takto*

$$(x, y) \in R_{\mathcal{N}} \text{ právě když existuje } A \in \mathcal{N} \text{ taková, že } x, y \in A.$$

Pak $R_{\mathcal{N}}$ je ekvivalence na M. □

Důkaz: Dokážeme, že $R_{\mathcal{N}}$ je reflexivní, symetrická a tranzitivní (Def. 4.4). □

- Reflexivita: Buď $x \in M$ libovolné. Jelikož $\mathcal{N}$ je rozklad na M, musí existovat $A \in \mathcal{N}$ takové, že $x \in A$ (jinak spor se třetí podmínkou z Definice 4.11). Proto $(x, x) \in R_{\mathcal{N}}$, tedy $R_{\mathcal{N}}$ je reflexivní. □
- Symetrie: Nechť $(x, y) \in R_{\mathcal{N}}$. Podle definice $R_{\mathcal{N}}$ pak existuje $A \in \mathcal{N}$ taková, že $x, y \in A$. To ale znamená, že také $(y, x) \in R_{\mathcal{N}}$ podle definice $R_{\mathcal{N}}$, tedy $R_{\mathcal{N}}$ je symetrická. □
- Tranzitivita: Nechť $(x, y), (y, z) \in R_{\mathcal{N}}$. Podle definice $R_{\mathcal{N}}$ existují $A, B \in \mathcal{N}$ takové, že $x, y \in A$ a $y, z \in B$. Jelikož $A \cap B \neq \emptyset$, podle druhé podmínky z Definice 4.11 platí $A = B$. Tedy $x, z \in A = B$, proto $(x, z) \in R_{\mathcal{N}}$ podle definice $R_{\mathcal{N}}$.

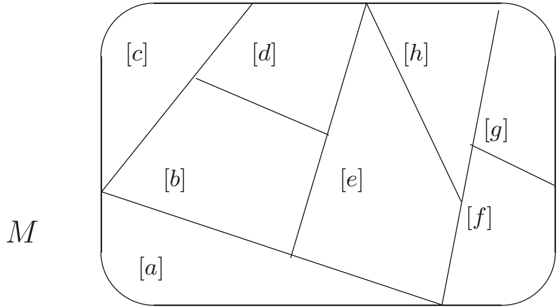
□

Každá ekvivalence R na M naopak jednoznačně určuje jistý rozklad M/R na M:

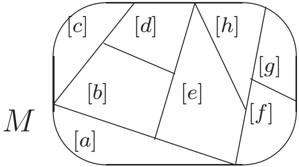
Věta 4.13. *Nechť* M *je množina a* R *ekvivalence na* M. *Pro každé* $x \in M$ *definujeme množinu*

$$[x] = \{y \in M \mid (x,y) \in R\}.$$

Pak $\{[x] \mid x \in M\}$ *je rozklad na* M, *který značíme* M/R. □



Důkaz: Dokážeme, že M/R splňuje podmínky Definice 4.11.



- Pro každé $[x] \in M/R$ platí $[x] \neq \emptyset$, neboť $x \in [x]$. □
- Nechť $[x], [y] \in M/R$. Ukážeme, že pokud $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, pak $[x] = [y]$. □
  Jestliže $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, existuje $z \in M$ takové, že $z \in [x]$ a $z \in [y]$. Podle definice $[x]$ a $[y]$ to znamená, že $(x, z), (y, z) \in R$. Jelikož R je symetrická a $(y, z) \in R$, platí $(z, y) \in R$. Jelikož $(x, z), (z, y) \in R$ a R je tranzitivní, platí $(x, y) \in R$. Proto také $(y, x) \in R$ (opět ze symetrie R). □Nyní dokážeme, že $[y] = [x]$:
  * „$[x] \subseteq [y]$“: Nechť $v \in [x]$. Pak $(x, v) \in R$ podle definice $[x]$. Dále $(y, x) \in R$ (viz výše), tedy $(y, v) \in R$ neboť R je tranzitivní. To podle definice $[y]$ znamená, že $v \in [y]$. □
  * „$[y] \subseteq [x]$“: Nechť $v \in [y]$. Pak $(y, v) \in R$ podle definice $[y]$. Dále $(x, y) \in R$ (viz výše), tedy $(x, v) \in R$ neboť R je tranzitivní. To podle definice $[x]$ znamená, že $v \in [x]$. □
- Platí $\bigcup_{[x] \in M/R} [x] = M$, neboť $x \in [x]$ pro každé $x \in M$. □