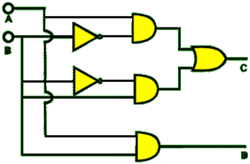
7 Jemný úvod do Logiky

Základem přesného matematického vyjadřování je správné používání matematické logiky a logických úsudků. Logika jako filozofická disciplína se intenzivně vyvíjí už od dob antiky, avšak ke skutečnému rozmachu logiky coby součásti matematiky došlo až začátkem 20. století.□



Dnes se základní logický kalkulus používá nejen v čisté matematice, ale „stojí" na něm také veškeré logické obvody a počítače.

Stručný přehled lekce

* Výroky v přirozené mluvě a formální výroková logika.
* Mechanický postup negace výrokových formulí.
* Neformální zmínka o predikátové logice (a kvantifikátorech).

7.1 Výroky v přirozené podobě

Prvním úkolem našeho výukového materiálu je vytvořit pevný „most“ mezi přirozenou lidskou mluvou a formálním jazykem matematiky.

Definice: V přirozené mluvě za *výrok* považujeme (každé) tvrzení, o kterém má smysl prohlásit, že je buď pravdivé nebo nepravdivé.□

Ukážeme si několik příkladů – které z nich jsou výroky?

- Dnes už v Brně pršelo.□
- Předmět FI: IB000 se vyučuje v prvním ročníku.□
- Platí $2 + 3 = 6$.□
- To je bez problémů. (Co?)□
- Platí $x > 3$.□
- Pro každé celé číslo x platí, že $x > 3$.□

Všimněte si, že pravdivost výroku by mělo být možné rozhodnout bez skrytých souvislostí (kontextu), a proto čtvrtý a pátý příklad za výroky nepovažujeme.

* Z více jednoduchých výroků vytváříme výroky složitější pomocí tzv. *logických spojek*.

Následuje několik dalších příkladů.

- Kateřina přijela ve 12:00 a šli jsme spolu do kina.□
- Množina $\{a, b\}$ má více než jeden prvek a není nekonečná.□
- Jestliže má Karel přes 90 kg váhy, nejedu s ním výtahem.□
- Jestliže má tato kráva 10 nohou, mají všechny domy modrou střechu.□

Zastavme se na chvíli nad posledním výrokem. Co nám říká? Je pravdivý? □Skutečně mají všechny domy modrou střechu a před námi stojí kráva s 10 nohama?

Přirozené vs. formální

* Schopnost porozumět podobným větám je součást lidského způsobu uvažování a z tohoto hlediska nemá přímou souvislost s matematikou (je to „přirozená logika“).□
* *Formální (matematická) logika* pak v podobném duchu definuje jazyk matematiky a přitom odstraňuje nejednoznačnosti přirozeného jazyka.

7.2 Formální výroková logika

Definice 7.1. Syntaxe výrokové logiky.
Buď $\mathcal{AT} = \{A, B, C, \ldots\}$ spočetně nekonečná množina *výrokových proměnných* (tzv. atomů).

Množina *výrokových formulí* Φ je definována induktivně následujícími pravidly:

(1) $\mathcal{AT} \subseteq \Phi$. □

(2) Jestliže $\varphi, \psi \in \Phi$, pak také $\neg(\varphi) \in \Phi$ a $(\varphi) \Rightarrow (\psi) \in \Phi$. □

(3) Každý prvek Φ vznikne konečně mnoha aplikacemi pravidel (1) a (2).□

Značení: Symbol $\neg$ je zván *negací* a $\Rightarrow$ je nazýván *implikací*.

Příklady několika správně utvořených formulí:

$$A, \quad (A) \Rightarrow (B), \quad ((A) \Rightarrow (\neg(B))) \Rightarrow ((\neg(B)) \Rightarrow (C))$$ □

A také příklady několika ne zcela správně utvořených formulí:

$$A \Rightarrow B, \quad \neg A \Rightarrow B$$

Konvence 7.2. Pro zvýšení čitelnosti budeme závorky vynechávat, pokud to nepovede k nejednoznačnostem za předpokladu, že negace $\neg$ má „vyšší prioritu“ než $\Rightarrow$. (Touto úmluvou se nemění množina Φ; mění se jen způsob reprezentace jejích prvků.) □

Dále si zavedeme, že

* $\varphi \vee \psi$ (*disjunkce*) je jiný zápis formule $\neg\varphi \Rightarrow \psi$, □
* $\varphi \wedge \psi$ (*konjunkce*) je jiný zápis formule $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$, □
* $\varphi \Leftrightarrow \psi$ (*ekvivalence*) je jiný zápis formule $(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$. □

Například formule $\big(\neg((A) \Rightarrow (B))\big) \Rightarrow \big((\neg(B)) \Rightarrow (C)\big)$ se dá s naší konvencí zapsat jako

$$(A \Rightarrow B) \vee B \vee C\,.$$

Definice 7.3. Sémantika výrokové logiky.
Valuace (ohodnocení) je funkce $\nu : \mathcal{AT} \to \{true, false\}$. Pro každou valuaci ν definujeme funkci $\mathcal{S}_\nu : \Phi \to \{true, false\}$ (*vyhodnocení*) induktivně takto:

- $\mathcal{S}_\nu(A) = \nu(A)$ pro každé $A \in \mathcal{AT}$.
- $\mathcal{S}_\nu(\neg\varphi) = \begin{cases} true & \text{jestliže } \mathcal{S}_\nu(\varphi) = false; \\ false & \text{jinak.} \end{cases}$
- $\mathcal{S}_\nu(\varphi \Rightarrow \psi) = \begin{cases} false & \text{jestliže } \mathcal{S}_\nu(\varphi) = true \text{ a } \mathcal{S}_\nu(\psi) = false; \\ true & \text{jinak.} \end{cases}$

Poznámka: Tento předpis podává nejen definici funkce $\mathcal{S}_\nu$, ale také návod na to, jak ji pro daný argument vypočítat.

Tvrzení 7.4. *Důsledkem Definice 7.3 je následovné:*

- $\mathcal{S}_\nu(\varphi \vee \psi) = true$ právě když $\mathcal{S}_\nu(\varphi) = true$ nebo $\mathcal{S}_\nu(\psi) = true$.
- $\mathcal{S}_\nu(\varphi \wedge \psi) = true$ právě když $\mathcal{S}_\nu(\varphi) = true$ a současně $\mathcal{S}_\nu(\psi) = true$.
- $\mathcal{S}_\nu(\varphi \Leftrightarrow \psi) = true$ právě když platí jedna z následujících podmínek
  - $\mathcal{S}_\nu(\varphi) = true$ a současně $\mathcal{S}_\nu(\psi) = true$,
  - $\mathcal{S}_\nu(\varphi) = false$ a současně $\mathcal{S}_\nu(\psi) = false$.

Pravdivostní tabulky

V praxi často vyhodnocení $\mathcal{S}_\nu$ logické výrokové formule zapisujeme do tzv. *pravdivostní tabulky*. Tato tabulka typicky má sloupce pro jednotlivé proměnné, případné „meziformule“ (pomůcka pro snažší vyplnění) a výslednou formuli. Řádků je 2^p (počet valuací), kde p je počet použitých proměnných. Místo $true, false$ píšeme $1, 0$.

Pro naše účely postačí uvést pravdivostní tabulku instruktážním příkladem. □

Příklad 7.5. *Jaká je pravdivostní tabulka pro formuli* $(A \Rightarrow B) \vee B \vee C$*?*

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \vee B \vee C$
0	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

□

Definice: Formule $\varphi \in \Phi$ je *splnitelná*, pokud pro některou valuaci ν platí, že $\mathcal{S}_\nu(\varphi) = \mathit{true}$. $\square$

Formule $\varphi \in \Phi$ je vždy pravdivá, neboli výroková *tautologie*, psáno $\models \varphi$, pokud pro každou valuaci ν platí, že $\mathcal{S}_\nu(\varphi) = \mathit{true}$. $\square$

Řekneme, že dvě formule $\varphi, \psi \in \Phi$ jsou *ekvivalentní*, právě když $\models \varphi \Leftrightarrow \psi$. $\square$

Tvrzení 7.6. *Několik užitečných tautologií:*

- $\models A \vee \neg A$ $\square$
- $\models \neg\neg A \Leftrightarrow A$ $\square$
- $\models (A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ $\square$
- $\models (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ $\square$
- $\models (\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B)) \Rightarrow A$

Kde jsme se s užitím takových tautologií už setkali?

A jak poznáme tautologii v pravdivostní tabulce?

7.3 Jak správně znegovat formuli?

Přesný význam formulí se zanořenými negacemi je někdy obtížné zjistit (podobně jako v běžné řeči).

„Není pravda, že nemohu neříct, že není pravda, že tě nemám nerad.“

Výrokové formule se proto obvykle prezentují v tzv. normálním tvaru, kde se negace vyskytují pouze u výrokových proměnných, formálně:

Definice: Formule $\varphi \in \Phi$ je v *normálním tvaru*, pokud se v ní operátor negace aplikuje pouze na výrokové proměnné.

Například, pokud přijmeme pravidlo „dvojí negace“ ($\neg\neg A \Leftrightarrow A$), tak výše napsanou větu si převedeme na lépe srozumitelný tvar:

„Nemusím říct, že tě mám nerad.“

Tvrzení 7.7. *Každou výrokou formuli lze převést do normálního tvaru, pokud k $\Rightarrow$ povolíme i užívání odvozených spojek $\wedge$ a $\vee$.*

- Pro ilustraci k $\neg(A \Rightarrow B)$ je ekvivalentní $A \wedge \neg B$,
- k $\neg\big(C \wedge (\neg A \Rightarrow B)\big)$ je ekvivalentní $\neg C \vee (\neg A \wedge \neg B)$.

Normální tvar (formální postup)

„Znegováním formule φ“ se obvykle myslí převod $\neg\varphi$ do normálního tvaru.

Metoda 7.8. Převod formule φ do normálního tvaru $\mathcal{F}(\varphi)$.
Definujeme funktory $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$ pro náš převod induktivními předpisy

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(A) &= A & \mathcal{G}(A) &= \neg A\\
\mathcal{F}(\neg\varphi) &= \mathcal{G}(\varphi) & \mathcal{G}(\neg\varphi) &= \mathcal{F}(\varphi)\\
\mathcal{F}(\varphi \Rightarrow \psi) &= \mathcal{F}(\varphi) \Rightarrow \mathcal{F}(\psi) & \mathcal{G}(\varphi \Rightarrow \psi) &= \mathcal{F}(\varphi) \wedge \mathcal{G}(\psi)\\
\mathcal{F}(\varphi \wedge \psi) &= \mathcal{F}(\varphi) \wedge \mathcal{F}(\psi) & \mathcal{G}(\varphi \wedge \psi) &= \mathcal{G}(\varphi) \vee \mathcal{G}(\psi)\\
\mathcal{F}(\varphi \vee \psi) &= \mathcal{F}(\varphi) \vee \mathcal{F}(\psi) & \mathcal{G}(\varphi \vee \psi) &= \mathcal{G}(\varphi) \wedge \mathcal{G}(\psi)\\
\mathcal{F}(\varphi \Leftrightarrow \psi) &= \mathcal{F}(\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{F}(\psi) & \mathcal{G}(\varphi \Leftrightarrow \psi) &= (\mathcal{F}(\varphi) \wedge \mathcal{G}(\psi)) \vee (\mathcal{G}(\varphi) \wedge \mathcal{F}(\psi))
\end{aligned}$$

Uvažme formuli $\neg(A \Rightarrow \neg(B \vee \neg(C \Rightarrow \neg A)))$. Užitím postupu 7.8 získáme:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\neg(A \Rightarrow \neg(B \vee \neg(C \Rightarrow \neg A)))) &= \mathcal{G}(A \Rightarrow \neg(B \vee \neg(C \Rightarrow \neg A))) &=\\
\mathcal{F}(A) \wedge \mathcal{G}(\neg(B \vee \neg(C \Rightarrow \neg A))) &= A \wedge \mathcal{F}(B \vee \neg(C \Rightarrow \neg A)) &=\\
A \wedge (\mathcal{F}(B) \vee \mathcal{F}(\neg(C \Rightarrow \neg A))) &= A \wedge (B \vee \mathcal{G}(C \Rightarrow \neg A)) &=\\
A \wedge (B \vee (\mathcal{F}(C) \wedge \mathcal{G}(\neg A))) &= A \wedge (B \vee (C \wedge \mathcal{F}(A))) &=\\
A \wedge (B \vee (C \wedge A))
\end{aligned}$$

Uvedené formální předpisy takto vyjadřují „intuitivní postup negace“ v matematicky přesném tvaru. Důkaz tohoto tvrzení je zároveň velmi hezkou ukázkou použití strukturální matematické indukce.

Věta 7.9. *Pro libovolnou výrokovou formuli φ platí, že*

a) $\mathcal{F}(\varphi)$ je ekvivalentní formule k φ v normálním tvaru

b) a $\mathcal{G}(\varphi)$ je formule v normálním tvaru ekvivalentní negaci $\neg\varphi$. □

Důkaz povedeme tzv. „indukcí ke struktuře formule“, tedy indukci povedeme podle „délky“ ℓ – počtu aplikací induktivních pravidel (Definice 7.1) při sestavování formule φ. □

- Báze indukce ($\ell = 0$): Pro všechny atomy, tj. výrokové proměnné, zřejmě platí, že $\mathcal{F}(A) = A$ je ekvivalentní A a $\mathcal{G}(A) = \neg A$ je ekvivalentní $\neg A$. □
- V indukčním kroku předpokládejme, že a) i b) platí pro všechny formule φ délky nejvýše ℓ. Vezmeme si formuli ψ délky $\ell+1$, která je utvořená jedním z následujících způsobů:

* $\psi \equiv \neg\varphi$ ($\equiv$ je „definiční rovnítko“ pro formule).
  Podle výše uvedeného induktivního předpisu je $\mathcal{F}(\psi) = \mathcal{F}(\neg\varphi) = \mathcal{G}(\varphi)$. Podle indukčního předpokladu pak je $\mathcal{G}(\varphi)$ formule v normálním tvaru ekvivalentní $\neg\varphi = \psi$. $\square$
  Obdobně pro funktor $\mathcal{G}$ vyjádříme $\mathcal{G}(\psi) = \mathcal{G}(\neg\varphi) = \mathcal{F}(\varphi)$. Podle indukčního předpokladu pak je $\mathcal{F}(\varphi)$ formule v normálním tvaru ekvivalentní φ a to je dále ekvivalentní $\neg\neg\varphi = \neg\psi$ podle Tvrzení 7.6. $\square$

* $\psi \equiv (\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$.
  Podle výše uvedeného induktivního předpisu je $\mathcal{F}(\psi) = \mathcal{F}(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = \mathcal{F}(\varphi_1) \Rightarrow \mathcal{F}(\varphi_2)$. Podle indukčního předpokladu jsou $\mathcal{F}(\varphi_1)$ i $\mathcal{F}(\varphi_2)$ formule v normálním tvaru ekvivalentní φ_1 a φ_2. Potom i $\mathcal{F}(\varphi_1) \Rightarrow \mathcal{F}(\varphi_2)$ je v normálním tvaru dle definice a podle sémantiky $\Rightarrow$ je ta ekvivalentní formuli $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = \psi$. $\square$
  Obdobně rozepíšeme $\mathcal{G}(\psi) = \mathcal{G}(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = \mathcal{F}(\varphi_1) \wedge \mathcal{G}(\varphi_2)$. Jelikož $\wedge$ je pro nás jen zkratka, výraz dále rozepíšeme $\mathcal{G}(\psi) = \neg(\mathcal{F}(\varphi_1) \Rightarrow \neg\mathcal{G}(\varphi_2))$. Podle indukčního předpokladu (a dvojí negace) jsou $\mathcal{F}(\varphi_1)$ a $\neg\mathcal{G}(\varphi_2)$ po řadě ekvivalentní formulím φ_1 a φ_2. Tudíž nakonec odvodíme, že $\mathcal{G}(\psi)$ je ekvivalentní negaci formule $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$, což jsme zde měli dokázat.

* $\psi \equiv (\varphi_1 \vee \varphi_2)$.
  Zde si musíme opět uvědomit, že spojka $\vee$ je pro nás jen zkratka, a přepsat $\psi \equiv (\neg\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$. Potom podle předchozích dokázaných případů víme, že $\mathcal{F}(\psi) = \mathcal{F}(\neg\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = \mathcal{F}(\neg\varphi_1) \Rightarrow \mathcal{F}(\varphi_2)$ je ekvivalentní formuli $(\neg\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = \psi$, což bylo třeba dokázat. Stejně tak $\mathcal{G}(\psi) = \mathcal{G}(\neg\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = \mathcal{F}(\neg\varphi_1) \wedge \mathcal{G}(\varphi_2)$ je podle předchozích případů důkazu ekvivalentní $(\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) = \neg\psi$. $\square$
* $\psi \equiv (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ a $\psi \equiv (\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$ už dokončíme analogicky.

$\square$

7.4 Predikátová logika, kvantifikace

- *Predikátová logika* je obecnější než logika výroková; každá formule výrokové logiky je i formulí predikátové logiky, ale ne obráceně. □
- Predikátová logika pracuje s *predikáty*. Predikáty jsou „parametrizované výroky“, které jsou buď pravdivé nebo nepravdivé pro každou konkrétní volbu parametrů. □ Výr. prom. lze chápat jako predikáty bez parametrů. □

Pro neformální přiblížení si uvedeme několik ukázek predikátů:

* $x > 3$ (parameterem je zde $x \in \mathbb{R}$), □
* R je ekvivalence na M (parametr $R \subseteq M \times M$), □
* čísla x a y jsou nesoudělná (parametry $x, y \in \mathbb{N}$),
* obecně jsou predikáty psány $P(x, y)$, kde x, y jsou libovolné parametry. □

Definice 7.10. Syntaxe i sémantika predikátové logiky.
Z predikátů lze vytvářet *predikátové formule* pomocí už známých (viz Definice 7.1) výrokových spojek a následujících tzv. *kvantifikátorů*:

- $\forall x \,.\, \varphi$ „pro každou volbu parametru x platí formule φ“,
- $\exists x \,.\, \varphi$ „existuje alespoň jedna volba parametru x, pro kterou platí φ“.

Fakt: Je-li každá proměnná – parametr predikátu – v dané formuli kvantifikovaná (tj. formule je *uzavřená*), pak je formule buď pravdivá nebo nepravdivá. □

Konvence 7.11. Pro lepší srozumitelnost zápisu formulí predikátové logiky se domluvíme na následujícím.

* „Neuzavřené" proměnné vyskytující se v predikátech ve formuli φ někdy pro referenci vypisujeme jako „parametry" samotné formule $\varphi(x, y, \dots)$. □
* Poukud není z kontextu jasné, co lze za daný parametr dosazovat, užívá se notace $\forall x \in M \,.\, \varphi$ a $\exists x \in M \,.\, \varphi$.
  (Platí, jen pokud je kvantifikovaný parametr prvkem nějaké fixní množiny!). □
* Tečka za symbolem kvantifikátoru se někdy vynechává (při vhodném uzávorkování formule), nebo se používá symbol „ : ". □
* Místo $\forall x_1 \,.\, \forall x_2 \,.\, \cdots \forall x_n \,.\, \varphi$ se někdy krátce píše $\forall x_1, x_2, \cdots, x_n\ (\varphi)$. Podobně u existenčního kvantifikátoru $\exists x_1, x_2, \cdots, x_n\ (\varphi)$.

Příklad 7.12. *Ukažme si vyjádření následujících slovních výroků v predikátové logice:*

- Každé prvočíslo větší než 2 je liché;

$$\forall n \in \mathbb{N}\,.\ \ (Pr(n) \wedge n{>}2) \ \Rightarrow\ Li(n).\ \square$$

- Každé číslo $n > 1$, které není prvočíslem, je dělitelné nějakým číslem y kde $n \neq y$ a $y > 1$;

$$\forall n \in \mathbb{N}\,.\ \ \big(n > 1 \wedge \neg Pr(n)\big) \Rightarrow\ \exists y\big(y|\,n \wedge n{\neq}y \wedge y{>}1\big).\ \square$$

- Jsou-li R a S ekvivalence na M, je také $R \cup S$ ekvivalence na M.
  Zde například můžeme mít dva pohledy na toto tvrzení – v jednom bereme množinu M za pevnou

$$\forall R, S\ :\ (Eq_M(R) \wedge Eq_M(S)) \ \Rightarrow\ Eq_M(R{\cup}S),$$

kdežto ve druhém je i množina M parametrem

$$\forall M\ \forall R, S\ :\ (Eq(M, R) \wedge Eq(M, S)) \ \Rightarrow\ Eq(M, R{\cup}S).$$

$\square$

Jak „negovat“ formule predikátové logiky?

Na závěr jen stručně rozšíříme výše uvedenou metodu formálního negování.

Metoda 7.13. Převod predikátové formule φ do normálního tvaru $\mathcal{F}(\varphi)$.
Dřívější Metodu 7.8 rozšíříme o následující indukční pravidla:

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
\mathcal{F}(P(x_1,\ldots,x_n)) & = & P(x_1,\ldots,x_n) & \mathcal{G}(P(x_1,\ldots,x_n)) & = & \neg P(x_1,\ldots,x_n) \\
\mathcal{F}(\forall x\,.\,\varphi) & = & \forall x\,.\,\mathcal{F}(\varphi) & \mathcal{G}(\forall x\,.\,\varphi) & = & \exists x\,.\,\mathcal{G}(\varphi) \\
\mathcal{F}(\exists x\,.\,\varphi) & = & \exists x\,.\,\mathcal{F}(\varphi) & \mathcal{G}(\exists x\,.\,\varphi) & = & \forall x\,.\,\mathcal{G}(\varphi) \;\Box
\end{array}
$$

Uvažme například negaci výše uvedené formule

$$\neg(\forall M\ \forall R,S\ :\ (Eq(M,R)\wedge Eq(M,S))\ \Rightarrow\ Eq(M,R\cup S))\,.$$

Pak

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{F}(\neg(\forall M\ \forall R,S\ :\ (Eq(M,R)\wedge Eq(M,S))\ \Rightarrow\ Eq(M,R\cup S))) & = \\
\mathcal{G}(\forall M\ \forall R,S\ :\ (Eq(M,R)\wedge Eq(M,S))\ \Rightarrow\ Eq(M,R\cup S)) & = \\
\exists M\ \exists R,S\ :\ \mathcal{G}((Eq(M,R)\wedge Eq(M,S))\ \Rightarrow\ Eq(M,R\cup S)) & = \\
\exists M\ \exists R,S\ :\ (Eq(M,R)\ \wedge\ Eq(M,S)\ \wedge\ \neg Eq(M,R\cup S))\,. &
\end{array}
$$