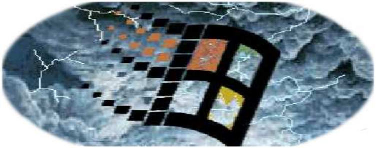
8 Dokazování vlastností algoritmů

Jak jste asi již poznali, umění programovat není zdaleka jen o tom naučit se syntaxi programovacího jazyka, ale především o schopnosti vytvářet a správně formálně zapisovat algoritmy. Přitom situace, kdy programátorem zapsaný kód počítá něco trochu jiného, než si programátor představuje, je snad nejčastější programátorskou chybou – o to zákeřnější, že ji žádný „chytrý" překladač nemůže odhalit.



□

Proto již od počátku seriózního studia informatiky je vhodné klást důraz na správné chápání zápisu algoritmů i na důkazy jejich vlastností a správnosti. □

Stručný přehled lekce

* Jakými postupy ověřovat, že počítačový program „správně funguje"?
* Použití matematické indukce k dokazování vlastností algoritmů.
* Několik konkrétních algoritmů a jejich důkazů.

Neformálně o „správnosti“ programů

Jak se máme přesvědčit, že je daný program „správný“? □

- Co třeba ladění programů? □
  Jelikož počet možných vstupních hodnot je (v principu) neohraničený, nelze otestovat všechna možná vstupní data. □

- Situace je zvláště komplikovaná v případě paralelních, randomizovaných, interaktivních a nekončících programů (operační systémy, systémy řízení provozu apod.). Takové systémy mají nedeterministické chování a opakované experimenty vedou k různým výsledkům.
  Nelze je tudíž ani rozumně ladit. . . □

- V některých případech je však třeba mít naprostou jistotu, že program funguje tak jak má, případně že splňuje základní bezpečnostní požadavky. □
  - ∗ Pro „malé“ algoritmy je možné podat přesný matematický důkaz □.
  - ∗ Narůstající složitosti programových systémů si pak vynucují vývoj jiných „spolehlivých“ formálních verifikačních metod.

Připomenutí našeho formálního popisu algoritmů

- *Proměnné* nebudeme deklarovat ani typovat, pole odlišíme závorkami `p[]`.
- *Přiřazení* hodnoty zapisujeme `a` $\leftarrow$ `b`, případně `a:=b`, ale nikdy ne `a=b`.
- Jako elem. operace je možné použít jakékoliv *aritmetické výrazy* v běžném matematickém zápise. Rozsahem a přesností čísel se zde nezabýváme.
- Podmíněné *větvení* uvedeme klíčovými slovy `if ... then ... else ... fi`, kde `else` větev lze vynechat (a někdy, na jednom řádku, i `fi`).
- Pevný *cyklus* uvedeme klíčovými slovy `foreach ... do ... done`, kde část za `foreach` musí obsahovat předem danou konečnou množinu hodnot pro přiřazování do řídící proměnné.
- *Podmíněný cyklus* uvedeme klíčovými slovy `while ... do ... done`. Zde se může za `while` vyskytovat jakákoliv logická podmínka.
- V zápise používáme jasné odsazování (zleva) podle úrovně zanoření řídících struktur (což jsou `if, foreach, while`).
- Pokud je to dostatečně jasné, elementární operace nebo podmínky můžeme i ve formálním zápise popsat běžným jazykem.

8.1 Jednoduché indukční dokazování

Příklad 8.1. *Zjistěte, kolik znaků* `'x'` *v závislosti na celočíselné hodnotě* n *vstupního parametru* `n` *vypíše následující algoritmus.*

Algoritmus 8.2.

```
foreach  i ← 1,2,3,...,n-1,n  do
    foreach  j ← 1,2,3,...,i-1,i  do
        vytiskni  'x';
    done
done
```
□

Nejprve si uvědomíme, že druhý (vnořený) cyklus vždy vytiskne celkem i znaků `'x'`. Proto iterací prvního cyklu (nejspíše) dostaneme postupně $1 + 2 + \cdots + n$ znaků `'x'` na výstupu, což již víme (Příklad 2.7), že je celkem $\frac{1}{2}n(n + 1)$.

□Budeme tedy dokazovat následující tvrzení:

Věta. Pro každé přir. n Algoritmus 8.2 vypíše právě $\frac{1}{2}n(n+1)$ znaků `'x'`.

Algoritmus 8.2.

```
foreach  i ← 1,2,3,...,n-1,n  do
    foreach  j ← 1,2,3,...,i-1,i  do
        vytiskni  'x';
    done
done
```

Věta. Pro každé přir. n Algoritmus 8.2 vypíše právě $\frac{1}{2}n(n+1)$ znaků 'x'.

Důkaz: Postupujeme indukcí podle n. Báze pro $n = 0$ je zřejmá, neprovede se ani jedna iterace cyklu a tudíž bude vytištěno 0 znaků 'x', což máme dokázat.

Nechť tedy tvrzení platí pro jakékoliv n_0 a položme $n = n_0 + 1$. Prvních n_0 iterací vnějšího cyklu podle indukčního předpokladu vypíše (ve vnitřním cyklu) celkem $\frac{1}{2}n_0(n_0 + 1)$ znaků 'x'. Pak již následuje jen jedna poslední iterace vnějšího cyklu s i ← n=n$_0$+1 a v ní se vnitřní cyklus j ← 1,2,...,i=n iteruje celkem $n = n_0 + 1$ -krát. Celkem tedy bude vytištěn tento počet znaků 'x':

$$\frac{1}{2}n_0(n_0 + 1) + n_0 + 1 = \frac{1}{2}(n_0 + 1 + 1)(n_0 + 1) = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

Důkaz indukčního kroku je hotov. □

Příklad 8.3. *Zjistěte, kolik znaků* `'z'` *v závislosti na celočíselné hodnotě* n *vstupního parametru* `n` *vypíše následující algoritmus.*

Algoritmus 8.4.

```
st ← "z";
foreach i ← 1,2,3,...,n-1,n do
    vytiskni řetězec st;
    st ← st.st;    (zřetězení dvou kopií st za sebou)
done
```
□

Zkusíme-li si výpočet simulovat pro $n = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$, postupně dostaneme počty `'z'` jako $0, 1, 3, 7, 15 \ldots$. □Na základě toho již není obtížné „uhodnout", že počet `'z'` bude (asi) obecně určen vztahem $2^n - 1$. Toto je však třeba dokázat! □

Jak záhy zjistíme, matematická indukce na naše tvrzení přímo „nezabírá", ale mnohem lépe se nám povede s následujícím přirozeným zesílením dokazovaného tvrzení:

Algoritmus 8.4.

```
st ← "z";
foreach i ← 1,2,3,...,n-1,n do
    vytiskni řetězec st;
    st ← st.st;    (zřetězení dvou kopií st za sebou)
done
```

Věta. Pro každé přirozené n Algoritmus 8.4 vypíše právě $2^n - 1$ znaků `'z'` a proměnná `st` bude na konci obsahovat řetězec 2^n znaků `'z'`. □

Důkaz: Postupujeme indukcí podle n. Báze pro $n = 0$ je zřejmá, neprovede se ani jedna iterace cyklu a tudíž bude vytištěno 0 znaků `'z'`, což máme dokázat. □

Nechť tedy tvrzení platí pro jakékoliv n_0 a položme $n = n_0 + 1$. Podle indukčního předpokladu po prvních n_0 iteracích bude vytištěno $2^{n_0} - 1$ znaků `'z'` a proměnná `st` bude obsahovat řetězec 2^{n_0} znaků `'z'`. V poslední iteraci cyklu (pro `i` ← `n=n`$_0$`+1`) vytiskneme dalších 2^{n_0} znaků `'z'` (z proměnné `st`) a dále řetězec `st` „zdvojnásobíme“. □

Proto po n iteracích bude vytištěno celkem $2^{n_0} - 1 + 2^{n_0} = 2^{n_0+1} - 1 = 2^n - 1$ znaků `'z'` a v `st` bude uloženo $2 \cdot 2^{n_0} = 2^{n_0+1} = 2^n$ znaků `'z'`. □

8.2 Algoritmy pro relace

V dalších pokročilejších ukázkách volíme algoritmy pro relace.

Algoritmus 8.5. **Symetrický uzávěr.**
Pro danou relaci R na n-prvkové množině $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ vytvoříme její symetrický uzávěr $\overset{\leftrightarrow}{R}$ takto:

$\overset{\leftrightarrow}{R} \leftarrow R$;
foreach i $\leftarrow$ 1,2,...,n-1,n do
  foreach j $\leftarrow$ 1,2,...,n-1,n do
    if $(a_i, a_j) \in R \wedge (a_j, a_i) \notin R$ then $\overset{\leftrightarrow}{R} \leftarrow \overset{\leftrightarrow}{R} \cup \{(a_j, a_i)\}$;
  done
done □

Důkaz: Zde není důkaz vůbec obtížný. Relace $\overset{\leftrightarrow}{R} \supseteq R$ je zřejmě symetrická, neboť (vnitřní) tělo cyklu pro všechny dvojice $(a_i, a_j) \in R$ přidá i (a_j, a_i). Z druhé strany všechny dvojice „přidané“ v $\overset{\leftrightarrow}{R} \setminus R$ musí být obsaženy podle definice symetrické relace, takže $\overset{\leftrightarrow}{R}$ je skutečně symetrickým uzávěrem podle definice uzávěru relace. □

Algoritmus 8.6. Tranzitivní uzávěr.
Pro danou relaci R na n-prvkové množině $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ vytvoříme její tranzitivní uzávěr R^+ takto:

```
R⁺ ← R ;
foreach  k ← 1,2,...,n-1,n  do
    foreach  i ← 1,2,...,n-1,n ; j ← 1,2,...,n-1,n  do
        if  (a_i, a_k) ∈ R⁺ ∧ (a_k, a_j) ∈ R⁺  then
            if  (a_i, a_j) ∉ R⁺  then  R⁺ ← R⁺ ∪ {(a_i, a_j)} ;
        fi
    done
done
```
□

Jak by se dala dokázat správnost popsaného algoritmu? Přímá aplikace indukce podle n nevypadá přínosně. . . (Zkuste si sami!)□

Nejkratší cesta k cíli vede použitím indukce (podle proměnné k vnějšího cyklu) na vhodně zesíleném tvrzení. Pro jeho formulaci si definujeme, že relace S na A je *k-částečně tranzitivní*, pokud pro libovolná i, j a pro $\ell \leq k$ platí, že z $(a_i, a_\ell), (a_\ell, a_j) \in S$ vyplývá $(a_i, a_j) \in S$.

Věta. Po každých $k \geq 0$ iteracích vnějšího cyklu Algoritmu 8.6 aktuální hodnota relace R^+ udává k-částečně tranzitivní uzávěr relace R na A. □

Důkaz: Báze indukce pro $k = 0$ jasně platí, neboť věta v tom případě nic neříká. □

Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro nějaké $k_0 \geq 0$ a dokažme jej i pro $k = k_0+1$. Zřejmě stačí uvažovat případ $k_0 < n$. Každá dvojice (a_i, a_j) přidaná do R^+ uvnitř cyklů musí náležet do k-částečně tranzitivního uzávěru podle definice. Zbývá zdůvodnit, proč každá dvojice (a_i, a_j) náležející do k-částečně tranzitivního uzávěru, ale ne do k_0-částečně tranzitivního uzávěru, bude do R^+ v k-té iteraci přidána. □

Není těžké ověřit, že (a_i, a_j) náleží do k-částečně tranzitivního uzávěru, právě když v relaci R nalezneme takovou cestu „po šipkách“ z a_i do a_j, která přechází pouze přes prvky a_ℓ kde $\ell \leq k$. V naší situaci vyplývá, že taková cesta musí použít i prvek a_k (jen jednou!), a proto (a_i, a_k) i (a_k, a_j) náleží do k_0-částečně tranzitivního uzávěru R. V k-té iteraci tudíž bude příslušná `if` podmínka splněná a (a_i, a_j) bude přidána do R^+. □

8.3 Dokazování konečnosti algoritmu

Všimněte si, že jsme se zatím v důkazech vůbec nezamýšleli nad tím, zda náš algoritmus vůbec skončí. (To není samozřejmé a důkaz konečnosti je nutno v obecnosti podávat!)

Prozatím jsme však ukazovali algoritmy využívající jen `foreach` cykly, přitom podle naší konvence obsahuje `foreach` cyklus předem danou konečnou množinu hodnot pro řídící proměnnou, neboli náš `foreach` cyklus vždy musí skončit. Ale už v příštím algoritmu využijeme `while` cyklus, u kterého vůbec není jasné kdy a jestli skončí, a tudíž bude potřebný i důkaz konečnosti. □

Metoda 8.7. Důkaz konečnosti.
Máme-li za úkol dokázat, že algoritmus skončí, vhodný postup je následující:

- Sledujeme zvolený celočíselný a zdola ohraničený *parametr algoritmu* (třeba přirozené číslo) a dokážeme, že se jeho hodnota v průběhu algoritmu neustále ostře zmenšuje. □
- Případně předchozí přístup rozšíříme na zvolenou *k-tici přirozených parametrů* a dokážeme, že se jejich hodnoty v průběhu algoritmu lexikograficky ostře zmenšují.

Pozor, naše „parametry“ vůbec nemusejí být proměnnými v programu.

Algoritmus 8.8. Cykly permutace.
Pro danou permutaci π na n-prvkové neprázdné množině $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ vypíšeme její cykly (viz Oddíl 6.4) takto:

```
U ← {1,2,...,n} = A;
while  U≠∅  do
    x ← min(U);    (nejmenší prvek množiny)
    začínáme výpis cyklu '⟨' ;
    while  x∈U  do
        vytiskneme x;
        U ← U\{x} ;    x ← π(x) ;
    done
    ukončíme výpis cyklu '⟩' ;
done
```

Jak dokážeme správnost tohoto algoritmu? □

Opět platí, že přímá aplikace indukce podle n nepřinese nic podstatného. Důkaz si tentokrát rozdělíme na dvě části (podle dvou `while` cyklů). Všimněte se navíc, že tentokrát je nezbytnou součástí důkazu správnosti algoritmu i důkaz, že oba `while` cykly vždy skončí.

```
while  U≠∅  do
    ........
done
```

Věta. Za předp., že vnitřní `while` cyklus pro jakoukoliv poč. volbu `x` skončí, vypíše cyklus permutace π obsahující x a odebere všechny prvky tohoto cyklu z množiny `U`, Algoritmus 8.8 vždy skončí se správným výsledkem.

Důkaz: Postupujeme indukcí podle počtu cyklů v permutaci π. Jediný cyklus v π (báze indukce) je vypsán dle předpokladu věty a množina U zůstane prázdná, tudíž vnější `while` cyklus skončí po první iteraci a výsledek je správný.

Podlě Věty 6.6 se každá permutace dá zapsat jako složení disjunktních cyklů. Nechť π je tedy složena z $\ell > 1$ cyklů. Po první iteraci `while` cyklu zbude v restrikci permutace π na množinu U celkem $\ell - 1$ cyklů. Podle indukčního předpokladu pak tyto zbylé cykly budou správně vypsány a algoritmus skončí. $\square$

Vidíte, že v tomto důkaze indukcí je indukční krok zcela triviální a důležitý je zde především základ indukce?

```
while  x∈U  do
    vytiskneme x;
    U ← U\{x};   x ← π(x);
done
```

Věta. Pokud π je permutace, tak vnitřní `while` cyklus vždy skončí a nalezne v π cyklus obsahující libovolný počáteční prvek $x \in U$. Navíc všechny prvky nalezeného cyklu odebere z množiny U. $\square$

Důkaz: Zde přímo zopakujeme argument důkazu Věty 6.6: Vezmeme libovolný prvek $x = x_1 \in U$ a iterujeme zobrazení $x_{i+1} = \pi(x_i)$ pro $i = 1, 2 \dots$, až dojde ke zopakování prvku $x_k = x_j$ pro $k > j \geq 1$. (To musí nastat, neboť A je konečná.) Jelikož prvek x_j byl již odebrán z U, v kroku $x = x_k$ dojde k ukončení našeho `while` cyklu. Nadto je π prostá, a proto nemůže nastat $x_k = x_j = \pi(x_{j-1})$ pro $j > 1$. Takto byl nalezen a odebrán z U cyklus $\langle a_1, \dots, a_{k-1} \rangle$ a důkaz je hotov. $\square$

8.4 Zajímavé algoritmy aritmetiky

Například umocňování na velmi vysoké exponenty je podkladem RSA šifry:

Algoritmus 8.9. Binární postup umocňování.
Pro daná číslo a, b vypočteme jejich celočíselnou mocninu (omezenou na zbytkové třídy modulo m kvůli prevenci přetečení rozsahu celých čísel v počítači), tj. $c = a^b \mod m$.

```
c ← 1;
while  b > 0  do
    if  b mod 2 > 0  then c ← (c·a) mod m;
    b ← ⌊b/2⌋;   a ← (a·a) mod m;
done
výsledek c; □
```

Zde použijeme k důkazu správnosti algoritmu indukci podle délky ℓ binárního zápisu čísla b.

Věta. Algoritmus 8.9 skončí a správně vypočte hodnotu $c = a^b \mod m$.

```
c ← 1;
while  b > 0  do
    if  b mod 2 > 0  then c ← (c·a) mod m;
    b ← ⌊b/2⌋;   a ← (a·a) mod m;
done
výsledek c;
```

Důkaz: Báze indukce je pro $\ell = 1$, kdy $b = 0$ nebo $b = 1$. Přitom pro $b = 0$ se cyklus vůbec nevykoná a výsledek je $c = 1$. Pro $b = 1$ se vykoná jen jedna iterace cyklu a výsledek je $c = a \mod m$. □

Nechť tvrzení platí pro $\ell_0 \geq 1$ a uvažme $\ell = \ell_0 + 1$. Pak zřejmě $b \geq 2$ a vykonají se alespoň dvě iterace cyklu. Po první iteraci bude $a' = a^2$, $b' = \lfloor b/2 \rfloor$ a $c' = (a^{b \mod 2}) \mod m$. Tudíž délka binárního zápisu b' bude jen ℓ_0 a podle indukčního předpokladu zbylé iterace algoritmu skončí s výsledkem

$$c = c' \cdot a'^{b'} \mod m = \left(a^{b \mod 2} \cdot a^{2\lfloor b/2 \rfloor}\right) \mod m = a^b \mod m\,.$$

□

Na závěr lekce si ukážeme jeden netradiční krátký algoritmus a jeho analýzu a důkaz ponecháme zde otevřené. Dokážete popsat, na čem je algoritmus založen?

Algoritmus 8.10. Celočíselná odmocnina.
Pro dané přirozené číslo x vypočteme dolní celou část jeho odmocniny $r = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.

```
p ← x;   r ← 0;
while  p > 0  do
    while  (r + p)^2 ≤ x  do r ← r+p ;
    p ← ⌊p/2⌋ ;
done
výsledek r ;
```