

Vypracoval: James Bond

UČO: 007

Skupina: MI6

1. [2 body] Mějme následující jazyk:

$$L = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0, n, m \text{ jsou lichá nebo } n = 2m\}$$

Rozhodněte, zda je zadaný jazyk regulární. Dále:

- Pokud je L regulární, sestrojte pro zadaný jazyk konečný automat i regulární gramatiku. Automat i gramatiku zapíšte úplně formálně správně.
- Pokud L není regulární, dokažte tuto skutečnost pomocí Lemmatu o vkládání (tzv. Pumping lemma).

Řešení: L není regulární. Důkaz provedeme pomocí PL.

- Necht' n je libovolné přirozené číslo.
- Zvolíme slovo $w = a^{2n}b^n$. Zřejmě $w \in L$ a $|w| \geq n$.
- Všechna možná rozdělení $w = xyz$, $|xy| \leq n$, $y \neq \varepsilon$ vypadají takto:

$$\begin{aligned}x &= a^k & k &\geq 0 \\y &= a^l & l &> 0, k + l \leq n \\z &= a^{2n-k-l}b^n\end{aligned}$$

- Zvolíme $i = 3$, slovo xy^iz pak vypadá takto:

$$xy^3z = a^k a^{3l} a^{2n-k-l} b^n = a^{2n+2l} b^n$$

Zřejmě $a^{2n+2l}b^n \notin L$, neboť $2n + 2l$ je sudé, ale $2n + 2l \neq 2n$ (protože $l > 0$). Podle Lemmatu o vkládání tedy L není regulární.

Vypracoval: James Bond

UČO: 007

Skupina: MI6

2. [2 body] Mějme následující jazyk:

$$L = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0, n, m \text{ jsou lichá a } n = 2m\}$$

Rozhodněte, zda je zadaný jazyk regulární. Dále:

- Pokud je L regulární, sestrojte pro zadaný jazyk konečný automat i regulární gramatiku. Automat i gramatiku запиšte úplně formálně správně.
- Pokud L není regulární, dokažte tuto skutečnost pomocí Lemmatu o vkládání (tzv. Pumping lemma).

Řešení: Není možno najít dvě přirozená čísla n, m tak, aby obě byla lichá a zároveň platilo $n = 2m$. Proto $L = \emptyset$, a tedy je L regulární jazyk.

Regulární gramatika generující L může vypadat například takto:

$$G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow aS\}, S)$$

Konečný automat přijímající L může vypadat například takto:

$$A = (\{q\}, \{a, b\}, \delta, q, \emptyset), \text{ kde } \delta(q, a) = \delta(q, b) = q.$$