IB102 – úkol 4 – řešení **Odevzdání: 24. 10. 2011**

Vypracoval: James Bond UČO: 007
Skupina: MI6

1. [2 body]

a) Uvažme abecedu $\Sigma = \{a\}$ a relaci R_a nad Σ^* definovanou takto:

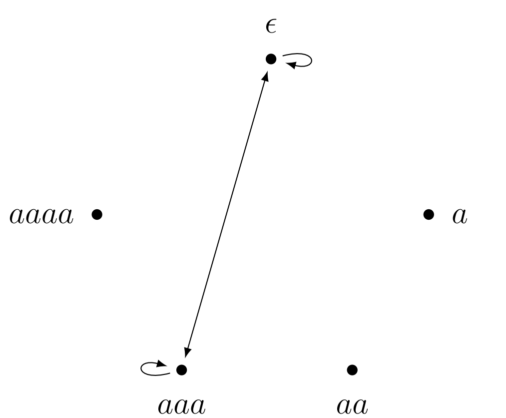
$$u\,R_a\,v \iff |u| \bmod 3 = 0 \wedge |v| \bmod 3 = 0.$$

- Rozhodněte, která slova z množiny $\{\epsilon, a, aa, aaa, aaaa\}$ jsou spolu v relaci a která nikoliv a výsledek znázorněte do obrázku níže, tj. spojte šipkou vedoucí z u do v všechna u a v taková, že $u\,R_a\,v$. Pokud $u\,R_a\,v$ i $v\,R_a\,u$, můžete použít "dvojšipku"– jednu čáru se šipkami na obou koncích. Nezapomeňte udělat šipku z u do u v případě, že $u\,R_a\,u$.
- Je R_a ekvivalence? Zdůvodněte.
- Je R_a pravá kongruence? Zdůvodněte.

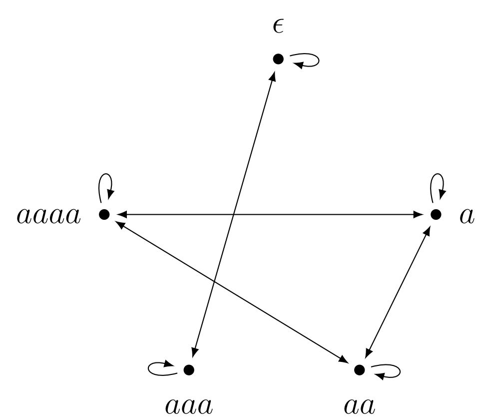
b) Proveďte totéž pro relaci R_b nad Σ^* definovanou takto:

$$u\,R_b\,v \iff (|u| \bmod 3 = 0 \iff |v| \bmod 3 = 0).$$

a)



b)



Řešení: Relace jsou znázorněny v obrázcích výše.

Relace R_a není reflexivní (např. neplatí $a\,R_a\,a$), není proto relací ekvivalence, a tudíž není ani relací pravé kongruence.

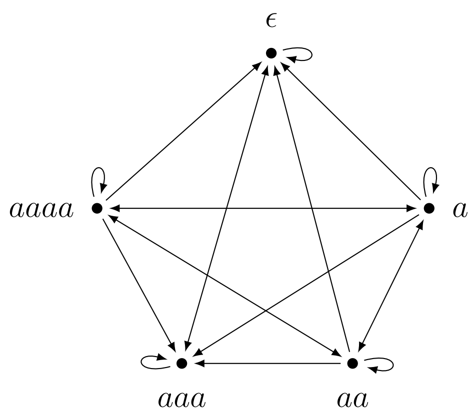
Relace R_b je reflexivní, symetrická i tranzitivní, je proto relací ekvivalence. Tyto vlastnosti zřejmě plynou z vlastností výrokového operátoru $\iff$. Relace R_b ovšem není relací pravé kongruence, neboť platí $a\,R_b\,aa$, ale neplatí $aa\,R_b\,aaa$.

Bonus: [+1 bod]

c) Proveďte totéž pro relaci R_c nad Σ^* definovanou takto:

$$u\,R_c\,v \iff (|u| \bmod 3 = 0 \Rightarrow |v| \bmod 3 = 0).$$

c)



Řešení: Relace R_c není symetrická (např. $a \, R_c \, \varepsilon$, ale neplatí $\varepsilon \, R_c \, a$), proto není relací ekvivalence, a tedy ani relací pravé kongruence.

IB102 – úkol 4 – řešení **Odevzdání: 24. 10. 2011**

Vypracoval: James Bond UČO: 007
Skupina: MI6

2. [**2 body**] Rozhodněte a zdůvodněte, zda platí:

- Existuje regulární jazyk $L \subseteq \{a, b\}^*$ a pravá kongruence $\sim$ na $\{a, b\}^*$ taková, že L je sjednocením některých tříd rozkladu $\{a, b\}^*$ podle $\sim$ a **index $\sim$ je dvojnásobkem indexu $\sim_L$**.

- Existuje regulární jazyk $L \subseteq \{a, b\}^*$ a pravá kongruence $\sim$ na $\{a, b\}^*$ taková, že L je sjednocením některých tříd rozkladu $\{a, b\}^*$ podle $\sim$ a **index $\sim_L$ je dvojnásobkem indexu $\sim$**.

(*Pozn.* Pokud bude Vaše odpověď „ano, platí“, uveďte zcela konkrétní příklad takového jazyka L a pravé kongruence $\sim$, a zdůvodněte. Pokud bude Vaše odpověď „ne, neplatí“, pokuste argumentovat, proč to neplatí pro žádný jazyk L a žádnou pravou kongruenci $\sim$).

Bonus: [**+1 bod**]

Jak by se změnily odpovědi, pokud bychom netrvali na regularitě jazyka L? Zdůvodněte.

Řešení:

- První tvrzení platí. Vezměme si $L = \emptyset$ (tedy $\sim_L = \Sigma^* \times \Sigma^*$) a $\sim = \{(\varepsilon, \varepsilon)\} \cup \Sigma^+ \times \Sigma^+$. Index $\sim_L$ je 1 a index $\sim$ je 2.

- Druhé tvrzení neplatí. Víme totiž, že prefixová ekvivalence pro jazyk L je největší pravá kongruence s vlastností, že L je sjednocením některých tříd jí odpovídajícího rozkladu na Σ^*. Pro každou takovou pravou kongruenci $\sim$ tedy musí platit, že index $\sim$ je větší nebo roven indexu $\sim_L$.

- *Bonus:* Pokud ze zadaných tvrzení vyjmeme požadavek na regularitu jazyka L, obě tvrzení platí. Stačí vzít libovolný neregulární jazyk L a vzít $\sim = \sim_L$. Pak jsou oba indexy nekonečné, a tudíž je možno tvrdit, že je jeden dvojnásobkem druhého.