IB102 – úkol 6 – řešení **Odevzdání: 7. 11. 2011**

Vypracoval: James Bond UČO: 007
Skupina: MI6

1. [**2 body**] Rozhodněte a dokažte, zda následující implikace platí:

(a) K je konečný jazyk, N je neregulární jazyk $\Rightarrow$ $\textsf{co-}((K \cap N) \cup N)$ je regulární.

(b) K je konečný jazyk, N je neregulární jazyk $\Rightarrow$ $\textsf{co-}(K \cap N) \cup N$ je regulární.

Řešení:

(a) Implikace neplatí. Stačí vzít $K = \emptyset$ a N libovolný neregulární jazyk. Pak zřejmě $\textsf{co-}((K \cap N) \cup N) = \textsf{co-}N$. Kdyby však $\textsf{co-}N$ byl regulární, pak by i $N = \textsf{co-}(\textsf{co-}N)$ byl regulární, což není.

(b) Implikace platí. Zřejmě $\textsf{co-}(K \cap N) \supseteq \textsf{co-}N$ a proto $\textsf{co-}(K \cap N) \cup N = \Sigma^*$, což je regulární jazyk.

IB102 – úkol 6 – řešení **Odevzdání: 7. 11. 2011**

Vypracoval: James Bond UČO: 007
Skupina: MI6

2. [**3 body**] Mějme následující operaci na jazycích:

$$triple(L) = \{w \cdot w \cdot w \mid w \in L\}$$

Rozhodněte a dokažte, zda následující tvrzení platí:

(a) Třída všech regulárních jazyků je uzavřená na *triple*.

(b) Třída všech konečných jazyků je uzavřená na *triple*.

Pokud při dokazování budete o nějakém jazyce tvrdit, že není regulární, tuto skutečnost musíte rovněž dokázat.

Bonus [1 bod]: Změnila by se nějak odpověď na předchozí otázky, pokud bychom se omezili na jazyky nad jednoprvkovou abecedou? Pokud ano, jak a proč?

Řešení:

(a) Toto tvrzení neplatí. Vezměme si například jazyk $L = \{a\}^* \cdot \{b\}$. Platí

$$triple(L) = \{a^n ba^n ba^n b \mid n \geq 0\}$$

O tomto jazyce ukážeme, že není regulární. Použijeme k tomu Myhill-Nerodovu větu. Nechť $L' = triple(L)$. Mějme nekonečnou posloupnost slov $a^0, a^1, a^2, \ldots, a^i, \ldots$; ukážeme, že pro žádné $i \neq j$ neplatí $a^i \sim_{L'} a^j$. Zřejmě však $a^i \cdot ba^iba^ib \in L'$, zatímco $a^j \cdot ba^iba^ib \notin L'$. Index $\sim_{L'}$ je tedy nekonečný, proto L' není regulární.

(b) Toto tvrzení platí. Slov jazyka $triple(L)$ je zřejmě právě tolik, kolik je slov jazyka L. (Formálně: existuje bijekce mezi L a $triple(L)$ definovaná takto: $f(w) = w \cdot w \cdot w$.)

Bonus: Pokud bychom se omezili na jazyky nad jednoprvkovou abecedou, pak by se změnila odpověď v části (a). Třída všech regulárních jazyků nad jednoprvkovou abecedou je uzavřená na *triple*, neboť pak platí

$$triple(L) = \{a^{3n} \mid a^n \in L\}$$

a k důkazu uzavřenosti pak stačí použít uzavřenost na homomorfismus $h(a) = aaa$.