Intuice k C-Y-K algoritmu

$S \to AB \mid CD \mid EF$

Platí $S \Rightarrow^* w$?

Intuice k C-Y-K algoritmu

Problém: Lze v dané gramatice v CNF vygenerovat dané slovo w?

Řešení: Pro každé neprázdné podslovo u slova w spočítáme množinu T_u všech neterminálů, z kterých lze odvodit u.

- $u = a$
- $u = ab$
- $u = abc$

Příklad

$$
\begin{aligned}
S &\to AB \mid SS \mid a \\
A &\to AA \mid BC \mid a \\
B &\to AB \mid b \\
C &\to SA \mid b
\end{aligned}
$$

platí $S \Rightarrow^* abaa$?

Příklad

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & AB \mid SS \mid a \\
A & \rightarrow & AA \mid BC \mid a \\
B & \rightarrow & AB \mid b \\
C & \rightarrow & SA \mid b
\end{array}
$$

$$T_{i,j} = \{X \in N \mid X \Rightarrow^* w_i w_{i+1} \dots w_{i+j-1}\}$$

$$w = abaa$$

	1	2	3	4
4				
3				
2				
1				
	a	b	a	a

	1	2	3	4
4				
3				
2				
1				
	a	b	a	a

Algoritmus Cocke - Younger - Kasami

Vstup: gramatika $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ v CNF, slovo $w = w_1 \ldots w_n$

Poznámky: $T_{i,j} = \{X \in N \mid X \Rightarrow^* w_i \ldots w_{i+j-1}\}$, pro $w = \varepsilon$ zřejmé

for $i := 1$ **to** n **do**
  $T_{i,1} := \emptyset$
  for každé pravidlo $A \to a \in P$ **do**
    if $a = w_i$ **then** $T_{i,1} := T_{i,1} \cup \{A\}$ **fi**
  od od
for $j := 2$ **to** n **do**
  for $i := 1$ **to** $n - j + 1$ **do**
    $T_{i,j} := \emptyset$
    for $k := 1$ **to** $j - 1$ **do**
      for každé pravidlo $A \to BC \in P$ **do**
        if $B \in T_{i,k} \wedge C \in T_{i+k,j-k}$ **then** $T_{i,j} := T_{i,j} \cup \{A\}$ **fi**
      od od od od

Vlastnosti bezkontextových jazyků

Věta 3.58. (a 3.61.) Třída bezkontextových jazyků ($\mathcal{L}_2$) **je** uzavřena vzhledem k operacím

1. sjednocení
2. zřetězení
3. iterace
4. pozitivní iterace
5. průnik s regulárním jazykem

Věta 3.60. Třída bezkontextových jazyků ($\mathcal{L}_2$) **není** uzavřena vzhledem k operacím

1. průnik
2. doplněk

Sjednocení

L_1 je generován CFG $\mathcal{G}_1 = (N_1, \Sigma_1, P_1, S_1)$ a
L_2 je generován CFG $\mathcal{G}_2 = (N_2, \Sigma_2, P_2, S_2)$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $N_1 \cap N_2 = \emptyset$.

Definujeme $\mathcal{G} = (N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, P, S)$,
kde S je nový symbol a

$$P = P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1, S \to S_2\}$$

Každá derivace v $\mathcal{G}$ začne použitím buď $S \to S_1$ nebo $S \to S_2$. Podmínka $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ zaručí, že při použití $S \to S_1$ (resp. $S \to S_2$) lze v dalším derivování používat jen pravidla z P_1 (resp. P_2).

Jazyk $L = L_1 \cup L_2$ je generován gramatikou $\mathcal{G}$.

Zřetězení

L_1 je generován CFG $\mathcal{G}_1 = (N_1, \Sigma_1, P_1, S_1)$ a
L_2 je generován CFG $\mathcal{G}_2 = (N_2, \Sigma_2, P_2, S_2)$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat $N_1 \cap N_2 = \emptyset$.

Definujeme $\mathcal{G} = (N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, P, S)$,
kde S je je nový symbol a

$$P = P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 S_2\}$$

Jazyk $L = L_1.L_2$ je generován gramatikou $\mathcal{G}$.

Iterace a pozitivní iterace

L_1 je generován CFG $\mathcal{G}_1 = (N_1, \Sigma_1, P_1, S_1)$

Definujeme $\mathcal{G} = (N_1 \cup \{S\}, \Sigma_1, P, S)$, kde S je je nový symbol a

$$P = P_1 \cup \{S \to SS_1 \mid \varepsilon\}$$

Jazyk $L = L_1^*$ je generován gramatikou $\mathcal{G}$.

Definujeme $\mathcal{G} = (N_1 \cup \{S\}, \Sigma_1, P, S)$, kde S je je nový symbol a

$$P = P_1 \cup \{S \to SS_1 \mid S_1\}$$

Jazyk $L = L_1^+$ je generován gramatikou $\mathcal{G}$.

Korektnost konstrukce pro iteraci

Dokážeme $L(\mathcal{G}) = L_1^*$.

Průnik a doplněk

$L_1 = \{a^n b^n c^m \mid m, n \geq 1\} \qquad L_2 = \{a^m b^n c^m \mid m, n \geq 1\}$

Oba tyto jazyky jsou CFL.

Kbyby $\mathcal{L}_2$ byla uzavřena vzhledem k operaci průniku, pak i $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ musel být bezkontextový, což však není.

Neuzavřenost $\mathcal{L}_2$ vůči doplňku plyne z její uzavřenosti na sjednocení, neuzavřenosti na průnik a z De Morganových pravidel:

$$L_1 \cap L_2 = \text{co–}(\text{co–}L_1 \cup \text{co–}L_2),$$

tj., kdyby $\mathcal{L}_2$ byla uzavřena na doplněk, musela by být uzavřena i na průnik, což však není.

Průnik s regulárním jazykem

$L = L(\mathcal{P})$, kde $\mathcal{P}$ je PDA $\mathcal{P} = (Q_1, \Sigma, \Gamma, \delta_1, q_1, Z_0, F_1)$
$R = L(\mathcal{A})$, kde $\mathcal{A}$ je deterministický FA $\mathcal{A} = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$

Sestrojíme PDA $\mathcal{P}'$ takový, že $L(\mathcal{P}')$=$L \cap R$.

$\mathcal{P}' = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde

- $Q = Q_1 \times Q_2$
- $q_0 = \langle q_1, q_2 \rangle$
- $F = F_1 \times F_2$
- δ : pro každé $p \in Q_1$, $q \in Q_2$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $Z \in \Gamma$ platí:

$$\delta(\langle p, q \rangle, a, Z) = \{(\langle p', q' \rangle, \gamma) \ \mid \ (p', \gamma) \in \delta_1(p, a, Z) \text{ a } \widehat{\delta_2}(q, a) = q'\}$$

Zřejmě platí $w \in L(\mathcal{P}') \iff w \in L(\mathcal{P}) \cap L(\mathcal{A})$.

Rozhodnutelné problémy pro bezkontextové jazyky

Problém příslušnosti
Existuje algoritmus, který pro libovolnou danou CFG $\mathcal{G}$ a slovo w rozhoduje, zda $w \in L(\mathcal{G})$ či nikoliv.

Problém prázdnosti
Existuje algoritmus, který pro libovolnou danou CFG $\mathcal{G}$ rozhoduje, zda $L(\mathcal{G}) = \emptyset$ či nikoliv.

Problém konečnosti
Existuje algoritmus, který pro libovolnou danou CFG $\mathcal{G}$ rozhoduje, zda $L(\mathcal{G})$ je konečný či nikoliv.

Konečnost

Věta 3.68. Ke každé CFG $\mathcal{G}$ lze sestrojit čísla m, n taková, že $L(\mathcal{G})$ je nekonečný právě když existuje slovo $z \in L(\mathcal{G})$ takové, že $m < |z| \leq n$.

Důkaz. Předpokládejme, že $\mathcal{G}$ je v CNF.

Nechť p, q jsou čísla s vlastnostmi popsanými v Lemmatu o vkládání. Položme $m = p$ a $n = p + q$.

($\Longleftarrow$) Jestliže $z \in L(\mathcal{G})$ je takové slovo, že $|z| > p$, pak existuje rozdělení $z = uvwxy$ splňující $vx \neq \varepsilon$ a $uv^iwx^iy \in L(\mathcal{G})$ pro všechna $i \geq 0$. Tedy jazyk $L(\mathcal{G})$ obsahuje nekonečně mnoho slov tvaru uv^iwx^iy, je tedy nekonečný.

($\Longrightarrow$) Nechť $L(\mathcal{G})$ je nekonečný. Pak obsahuje i nekonečně mnoho slov délky větší než p – tuto množinu slov označme M. Zvolme z M libovolné takové slovo z, které má minimální délku a ukažme, že musí platit $p < |z| \leq p + q$.

Kdyby $|z| > p + q$, pak (opět dle Pumping lemmatu pro CFL) lze z psát ve tvaru $z = uvwxy$, kde $vx \neq \varepsilon, |vwx| \leq q$ a $uv^iwx^iy \in L(\mathcal{G})$ pro všechna $i \geq 0$.

Pro $i = 0$ dostáváme, že $uwy \in L(\mathcal{G})$ a současně $|uwy| < |uvwxy|$.

Z nerovností $|uvwxy| > p + q$ a $|vwx| \leq q$ plyne, že $|uwy| > (p + q) - q = p$. Tedy $uwy \in M$, což je spor s volbou z jako slova z M s minimální délkou. Celkem tedy musí být $|z| \leq p + q$. $\square$

Vlastnost sebevložení

Definice 3.70. Nechť $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ je CFG. Řekneme, že $\mathcal{G}$ má **vlastnost sebevložení**, jestliže existují $A \in N$ a $u, v \in \Sigma^+$ taková, že $A \Rightarrow^+ uAv$.

CFL L má **vlastnost sebevložení**, jestliže každá bezkontextová gramatika, která jej generuje, má vlastnost sebevložení.

Věta 3.71. CFL L má vlastnost sebevložení, právě když L není regulární.

Důkaz ve skriptech obsahuje závažnou chybu. Kdo mi jako první pošle mail s popisem chyby, získá 1 tvrdý bod. **Deadline: 31. 12. 2011**

Nerozhodnutelné problémy pro bezkontextové jazyky

Problém regularity
Neexistuje algoritmus, který pro libovolnou danou CFG $\mathcal{G}$ rozhoduje, zda $L(\mathcal{G})$ je regulární či nikoliv.
(Tedy není rozhodnutelné, zda $L(\mathcal{G})$ má vlastnost sebevložení či nikoliv.)

Problém univerzality
Neexistuje algoritmus, který pro libovolnou danou CFG $\mathcal{G}$ rozhoduje, zda $L(\mathcal{G}) = \Sigma^*$ či nikoliv.

Problémy ekvivalence a inkluze také nejsou rozhodnutelné (plyne z nerozhodnutelnosti problému univerzality).