

ε -pravidla

Definice 3.13. Řekneme, že CFG $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ je **bez ε -pravidel** právě když buď

1. P neobsahuje žádné ε -pravidlo (tj. pravidlo tvaru $A \rightarrow \varepsilon$) nebo
2. v P existuje právě jedno ε -pravidlo $S \rightarrow \varepsilon$ a S se nevyskytuje na pravé straně žádného pravidla z P .

Příklad

$\mathcal{G} = (\{S, A, B\}, \{a, b, c\}, P, S)$, kde P obsahuje pravidla

$$S \rightarrow aAbBc$$

$$A \rightarrow BB \mid a \mid \varepsilon$$

$$B \rightarrow AcA \mid b$$

Algoritmus pro odstranění ε -pravidel

Vstup: CFG $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$

Výstup: CFG $\mathcal{G}' = (N', \Sigma, P', S')$ bez ε -pravidel splňující $L(\mathcal{G})=L(\mathcal{G}')$

```
1 Zkonstruuuj  $N_\varepsilon = \{A \in N \mid A \Rightarrow^* \varepsilon\}$ 
2 Množinu pravidel  $P'$  zkonstruuuj takto:
3 foreach  $A \rightarrow X_1 \dots X_n \in P$  do
4   přidej do  $P'$  všechna pravidla tvaru  $A \rightarrow \alpha_1 \dots \alpha_n$  splňující
5     (a) pokud  $X_i \notin N_\varepsilon$  pak  $\alpha_i = X_i$ 
6     (b) pokud  $X_i \in N_\varepsilon$  pak  $\alpha_i$  je buď  $X_i$ , nebo  $\varepsilon$ 
7     (c) ne všechna  $\alpha_i$  jsou  $\varepsilon$ 
8 od
9 if  $S \in N_\varepsilon$  then přidej do  $P'$  pravidla  $S' \rightarrow S \mid \varepsilon$  ( $S' \notin N \cup \Sigma$ );
10      $N' := N \cup \{S'\}$ 
11   else  $N' := N$ ;  $S' := S$  fi
```

Příklad

$\mathcal{G} = (\{S, A, B\}, \{a, b, c\}, P, S)$, kde P obsahuje pravidla

$$S \rightarrow aAbBc \mid AB$$

$$A \rightarrow BB \mid a \mid \varepsilon$$

$$B \rightarrow AA \mid b$$

Korektnost algoritmu

Konečnost.

Výsledná gramatika je bez ε -pravidel.

Ekvivalence gramatik.

Jednoduchá pravidla

Jednoduchým pravidlem nazýváme každé pravidlo tvaru $A \rightarrow B$, kde $A, B \in N$.

$$S \rightarrow aAbBc$$

$$A \rightarrow aA \mid B \mid a$$

$$B \rightarrow bB \mid b$$

Algoritmus pro odstranění jednoduchých pravidel

Vstup: CFG $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ bez ε -pravidel

Výstup: CFG $\mathcal{G}' = (N, \Sigma, P', S)$ bez jednoduchých a ε -pravidel, kde
 $L(\mathcal{G}) = L(\mathcal{G}')$

```
1 foreach  $A \in N$  do
2    $i := 0$ ;  $N_i := \{A\}$ 
3   repeat  $i := i + 1$ 
4      $N_i := N_{i-1} \cup \{C \mid B \rightarrow C \in P, B \in N_{i-1}\}$ 
5   until  $N_i = N_{i-1}$ 
6    $N_A := N_i$ 
7 od
8  $P' := \emptyset$ 
9 foreach  $A \in N$  do
10   $P' := P' \cup \{A \rightarrow \alpha \mid B \in N_A \wedge B \rightarrow \alpha \in P \text{ není jednoduché}\}$ 
11 od
```

Příklad

$\mathcal{G} = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$,

kde P obsahuje pravidla

$S \rightarrow ABC$

$A \rightarrow aA \mid B \mid a$

$B \rightarrow bB \mid A$

$C \rightarrow cC \mid A$

Korektnost algoritmu

Konečnost.

Výsledná gramatika neobsahuje jednoduchá pravidla.

Ekvivalence gramatik:

$L(\mathcal{G}') \subseteq L(\mathcal{G})$ Nechť $w \in L(\mathcal{G}')$, pak existuje derivace

$$S = \alpha_0 \Rightarrow_{\mathcal{G}'} \alpha_1 \Rightarrow_{\mathcal{G}'} \dots \Rightarrow_{\mathcal{G}'} \alpha_n = w.$$

Pokud bylo při kroku $\alpha_i \Rightarrow_{\mathcal{G}'} \alpha_{i+1}$ použito pravidlo $A \rightarrow \beta$, pak existuje nějaké $B \in N_A$ takové, že v \mathcal{G} platí $A \Rightarrow^* B$ a $B \rightarrow \beta$.

Tedy v \mathcal{G} platí $A \Rightarrow^* \beta$ a $\alpha_i \Rightarrow^* \alpha_{i+1}$.

$L(\mathcal{G}) \subseteq L(\mathcal{G}')$ Nechť $w \in L(\mathcal{G})$, pak existuje levá derivace

$$S = \alpha_0 \Rightarrow_{\mathcal{G}} \alpha_1 \Rightarrow_{\mathcal{G}} \dots \Rightarrow_{\mathcal{G}} \alpha_n = w.$$

Tu lze rozdělit na úseky tak, že v celém úseku se použila pouze jednoduchá pravidla anebo žádné jednoduché pravidlo. Úseky s jednoduchými pravidly lze nahradit.

Vlastní bezkontextová gramatika

Definice 3.17. CFG $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ se nazývá **necyklická**, právě když neexistuje $A \in N$ takový, že $A \Rightarrow^+ A$.

\mathcal{G} se nazývá **vlastní**, právě když je bez nepoužitelných symbolů, bez ε -pravidel a necyklická.

Věta 3.18. Ke každému neprázdnému bezkontextovému jazyku existuje **vlastní** bezkontextová gramatika, která jej generuje.

Důkaz. Z bezkontextové gramatiky pro neprázdný jazyk odstraníme ε -pravidla a jednoduchá pravidla. Odstraněním nepoužitelných symbolů pak získáme vlastní gramatiku. \square

Chomského normální forma

Definice 3.19. Bezkontextová gramatika $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ je v **Chomského normální formě (CNF)** $\stackrel{def}{\iff}$ \mathcal{G} je bez ε -pravidel a každé pravidlo z P má jeden z těchto tvarů:

1. $A \rightarrow BC$, kde $B, C \in N$
2. $A \rightarrow a$, kde $a \in \Sigma$
3. $S \rightarrow \varepsilon$

Věta 3.21. Každý bezkontextový jazyk lze generovat bezkontextovou gramatikou v Chomského normální formě.

Příklad

$\mathcal{G} = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$,
kde P obsahuje pravidla

$$S \rightarrow AS \mid a$$

$$A \rightarrow AB \mid AA \mid a$$

$$B \rightarrow b$$

Lemma o substituci

Lemma 3.20. (o substituci)

Nechť $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ je CFG. Nechť $A \rightarrow \alpha_1 B \alpha_2 \in P$.

Nechť $B \rightarrow \beta_1 \mid \dots \mid \beta_r$ jsou všechna pravidla v P tvaru $B \rightarrow \alpha$.

Definujme $\mathcal{G}' = (N, \Sigma, P', S)$, kde

$$P' = (P \setminus \{A \rightarrow \alpha_1 B \alpha_2\}) \cup \{A \rightarrow \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \mid \dots \mid \alpha_1 \beta_r \alpha_2\}.$$

Pak $L(\mathcal{G}) = L(\mathcal{G}')$.

Algoritmus transformace do CNF

1. $L = \emptyset$

2. $L \neq \emptyset$

Gramatiku pro L převedeme na vlastní a bez jednoduchých pravidel.

$$X \rightarrow \varepsilon$$

$$X \rightarrow a$$

$$X \rightarrow A$$

$$X \rightarrow ab$$

$$X \rightarrow aB$$

$$X \rightarrow Ab$$

$$X \rightarrow AB$$

⋮

$$X \rightarrow aBcD$$

Lemma o vkládání pro bezkontextové jazyky

Věta 3.24. Nechť L je CFL. Pak existují $p, q \in \mathbb{N}$ (závisející na L) taková, že každé slovo $z \in L$ delší než p lze psát ve tvaru $z = uvwxy$, kde

- alespoň jedno ze slov v, x je neprázdné (tj. $vx \neq \varepsilon$),
- $|vwx| \leq q$ a
- $uv^iwx^iy \in L$ pro každé $i \in \mathbb{N}_0$.

Poznámka 3.25. Tvrzení zůstává v platnosti i když namísto konstant p, q budeme všude psát jen (jedinou) konstantu n .

Důkaz Lemmatu o vkládání pro bezkontextové jazyky

Nechť L je generován gramatikou v CNF.

délka cesty z kořene do listu

= počet modrých hran

= počet neterminálů na cestě - 1

hloubka stromu

= maximální délka cesty

Derivační strom hloubky k má max. 2^k listů \implies slovo délky nejvýše 2^k .

Derivační strom pro slovo delší než 2^{k-1} má cestu délky alespoň k .

Tato cesta obsahuje alespoň $k + 1$ neterminálů.

Důkaz Lemmatu o vkládání pro bezkontextové jazyky

Nechť L generován gramatikou $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$, která je v CNF.

Označme $k = \text{card}(N)$ a položme $p = 2^{k-1}$, $q = 2^k$.

Nechť $z \in L$ je slovo delší než p . Pak v libovolném derivačním stromu slova z existuje cesta délky alespoň k . Zvolme pevně jeden takový strom T a v něm (libovolnou) nejdelší cestu C .

Na cestě C lze zvolit tři uzly u_1, u_2, u_3 s vlastnostmi:

1. uzly u_1, u_2 jsou označeny týmž neterminálem, řekněme A ,
2. u_1 leží blíže ke kořenu než u_2 ,
3. u_3 je list a
4. cesta z u_1 do u_3 má délku nejvýše k .

Použití Lemmatu o vkládání pro bezkontextové jazyky

Lemma o vkládání je implikace $P \implies Q$, kde P je výrok, že L je CFL a Q jsou uvedené vlastnosti.

Obměnu Lemmatu o vkládání $\neg Q \implies \neg P$ lze použít k důkazu, že nějaký jazyk L **není** CFL — stačí, když ukážeme platnost $\neg Q$.

$\neg Q$:

1. Pro libovolnou konstantu $n \in \mathbb{N}$
2. existuje slovo $z \in L$ delší než n takové, že
3. pro všechny slova u, v, w, x, y splňující
 $z = uvwxy$, $vx \neq \varepsilon$ a $|vwx| \leq n$
4. existuje $i \in \mathbb{N}_0$ takové, že $uv^iwx^iy \notin L$.

Příklad použití Lemmatu o vkládání

$$L = \{a^i b^i c^i \mid i \geq 1\}$$

1. Pro libovolnou konstantu $n \in \mathbb{N}$
2. existuje slovo $z \in L$ delší než n takové, že
3. pro všechny slova u, v, w, x, y splňující
 $z = uvwxy$, $vx \neq \varepsilon$ a $|vwx| \leq n$
4. existuje $i \in \mathbb{N}_0$ takové, že $uv^iwx^iy \notin L$.

$\implies L$ není CFL.