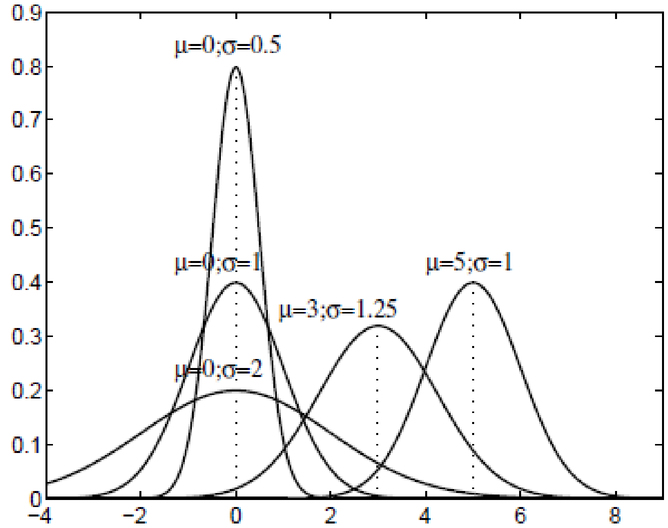
1. Normální rozložení a odvozená rozložení.

Náhodná veličina s normálním rozložením $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ má dominantní postavení v počtu pravděpodobnosti i v matematické statistice. Vyskytuje se v takových situacích, kdy se ke konstantní střední hodnotě μ přičítá velké množství nezávislých náhodných vlivů, které lehce kolísají kolem nuly. Takto vzniklá variabilita je charakterizována konstantou $\sigma \geq 0$. Normálně rozdělená náhodná veličina je tedy určena dvěma parametry μ a σ^2, kde μ je její střední hodnota a σ^2 je její rozptyl. Speciální případ, kde $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$ nazýváme standardizované normální rozložení a značíme jej $U \sim N(0,1)$. Příklady: procentové změny v cenách akcií na dobře fungujících trzích (Eugene Chama, 1960), devizové výplatní poměry měn,...

Ze standardizovaného normálního rozložení U lze různými transformacemi odvodit další rozložení, z nichž se seznámíme s Pearsonovým χ^2-rozložením, studentovým $t-$rozložením a Fisher-Snedecorovým $F-$rozložením. Tato rozložení nacházejí velké uplatnění především v matematické statistice.

Definice 1.1

O spojité náhodné veličině X říkáme, že má normální rozložení s parametry μ a σ^2, když její hustota je dána vzorcem $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$, $x \in \mathbf{R}$. Zkráceně píšeme $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.



Distribuční funkci normální náhodné veličiny X vyjádříme

$\forall x \in \mathbf{R} : F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}\, dt.$

Definice 1.2

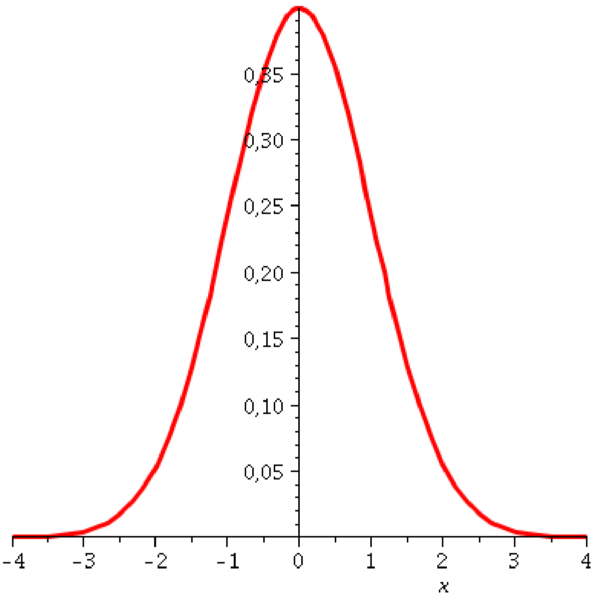
Náhodnou veličinu $U \sim N(0,1)$ nazýváme standardizovaná normální náhodná veličina. Její hustota má tvar $f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2}$, $u \in \mathbf{R}$

a distribuční funkce má tvar $F(u) = \int\limits_{-\infty}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$

Následující věta uvede vlastnosti normálního rozložení.

Poznámka: Pro standardizovanou normální veličinu je obvyklé označení hustoty: $f(u) =$ distribuční funkce: $F(u) =$, .

$plot\left(\frac{1}{\mathrm{sqrt}(2\cdot \mathrm{Pi})}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), x=-4..4\right)$



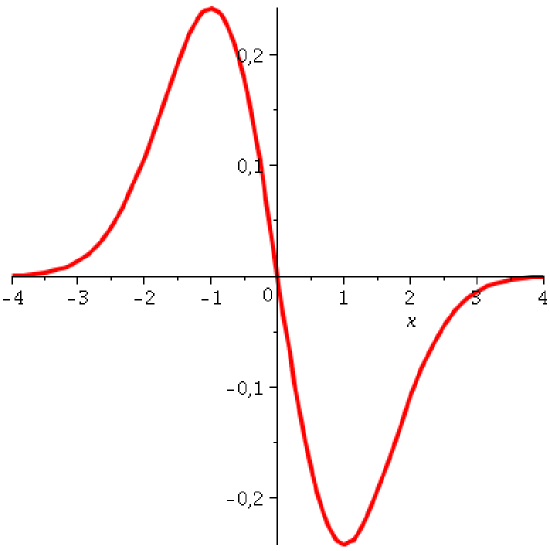
$$df := diff\left(\frac{1}{\mathrm{sqrt}(2\cdot \mathrm{Pi})}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), x\right)$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}\;x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{\pi}}$$

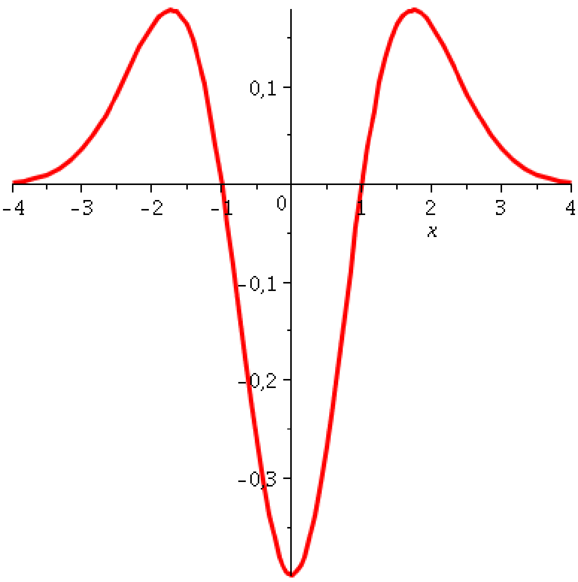
$$df2 := diff(df, x)$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}\;\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{\pi}}+\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}\;x^2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{\pi}}$$

$plot(df, x=-4..4)$



$plot(df2, x=-4..4)$



$$solve(df=0)$$

$$0$$

$$solve(df2=0)$$

$$1, -1$$

Nalezení vrcholu a inflexních bodů v obecném případě:

$$f := \frac{1}{\sigma \cdot sqrt(2 \cdot \mathrm{Pi})} \exp\left(-\frac{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{\pi}}$$

$$df := diff(f, x)$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{(x-\mu)\,e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}\sqrt{2}}{\sigma^3\sqrt{\pi}}$$

$$solve(df = 0, x)$$

$$\mu$$

$$df2 := diff(df, x)$$

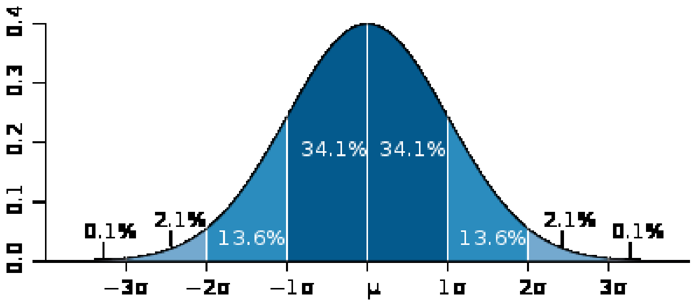
$$-\frac{1}{2}\,\frac{e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}\sqrt{2}}{\sigma^3\sqrt{\pi}} + \frac{1}{2}\,\frac{(x-\mu)^2\,e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}\sqrt{2}}{\sigma^5\sqrt{\pi}}$$

$$solve(df2 = 0, x)$$

$$\sigma + \mu,\ -\sigma + \mu$$

Hlavní charakteristiky křivky normálního rozdělení:

- Unimodální
- Symetrická okolo průměru
- Asymptoticky se přibližuje k ose x
- Má zvonovitý tvar
- Plocha pod křivkou = 1
- Inflexní body leží ve vzdálenosti ± σ od průměru
- 99% plochy pod křivkou se rozprostírá ve vzdálenosti ± 3σ od průměru



Věta 1.3

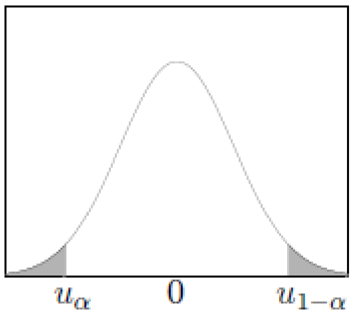
a) Jestliže $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, pak $E(X) = \mu$, $D(X) = \sigma^2$.

b) Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $b \neq 0$.
Jestliže $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ a $Y = a + bX$, pak $Y \sim N(a + b\mu, b^2\sigma^2)$.
[Lineární transformace normální náhodné veličiny normalitu neporuší.]

c) Nechť $X_1, \ldots X_n$ jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny,
$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, \ldots n$. Pak $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \ \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2)$
[Součet nezávislých normálních náhodných veličin je opět normální náhodná veličina.]

d) Nechť $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Pak $U = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$
[Normální náhodnou veličinu X standardizujeme tak, že od ní odečteme její střední hodnotu a tento rozdíl pak dělíme její směrodatnou odchylkou.]

Poznámka 1.4
Distribuční funkce náhodné veličiny $U \sim N(0, 1)$ je tabelována ve statistických tabulkách pro $u \geq 0$. Jinak se užívá přepočtový vzorec $F(-u) = 1 - F(u)$. Kvantily náhodné veličiny $U \sim N(0, 1)$ se značí u_α a jsou tabelovány pro $\alpha \geq 0,5$. Jinak se užívá přepočtový vzorec $u_\alpha = -u_{1-\alpha}$.



Příklad 1.5

Výsledky u přijímací zkoušky na jistou VŠ jsou normálně rozloženy se střední hodnotou $\mu = 550$ bodů a směrodatnou odchylkou $\sigma = 100$ bodů. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný uchazeč bude mít aspoň 600 bodů?

Řešení

Náhodná veličina X udává bodový výsledek náhodně vybraného uchazeče, $X \sim N(550, 100^2)$

$$P(X \geq 600) = 1 - P(X < 600) = 1 - P(X \leq 600) + \overbrace{P(X = 600)}^{0} =$$
$$= 1 - P(\tfrac{X-550}{100} \leq \tfrac{600-550}{100}) = 1 - P(U \leq 0,5) = 1 - F(0,5) = 1 - 0,69146 \doteq 0,31.$$

$F(0,5)$ je distribuční funkce standardizovaného normálního rozložení v bodě 0,5 - viz. tabulky.

Příklad 1.6

Nechť $X \sim N(-1, 4)$. Najděte kvantil $K_{0,025}(X)$.

Řešení

$U = \frac{X+1}{2} \sim N(0,1), \qquad K_{0,025}(X) = ?$

$$0,025 = P(X \leq K_{0,025}(X)) = P(\tfrac{X+1}{2} \leq \tfrac{K_{0,025}(X)+1}{2}) = P(U \leq \tfrac{K_{0,025}(X)+1}{2}).$$

Tedy $\frac{K_{0,025}(X)+1}{2} = u_{0,025}$

Proto $K_{0,025}(X) = 2u_{0,025} - 1 = 2\cdot(-u_{1-0,025}) - 1 = -2\cdot u_{0,975} - 1 = -2\cdot 1,96 - 1 = -4,92$

Příklad: K danému číslu α, $0 < \alpha < 1$, určete interval tak, aby pro náhodnou veličinu U, která má normované normální rozdělení $N(0;1)$ platilo:

a) (♣) $P(|U| < a) = 1 - \alpha$;

b) (♣♣) $P(U < a) = 1 - \alpha$;

c) (♣♣♣) $P(U > a) = 1 - \alpha$.

Řešení: a) Z podmínky vyplývá

$1 - \alpha = P(-a < U < a) = \Phi(a) - \Phi(-a) = \Phi(a) - (1 - \Phi(a)) = 2\Phi(a) - 1 \Rightarrow \Phi(a) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

Odtud plyne, že $a = u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ kvantil. Je tedy

$-a < U < a \Leftrightarrow -u_{1-\frac{\alpha}{2}} < U < u_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

b) Obdobně jako v a) dostaneme

$1 - \alpha = P(U < a) = \Phi(a) \Rightarrow a = u_{1-\alpha}$. Je tedy

$U < a \Leftrightarrow U < u_{1-\alpha}$.

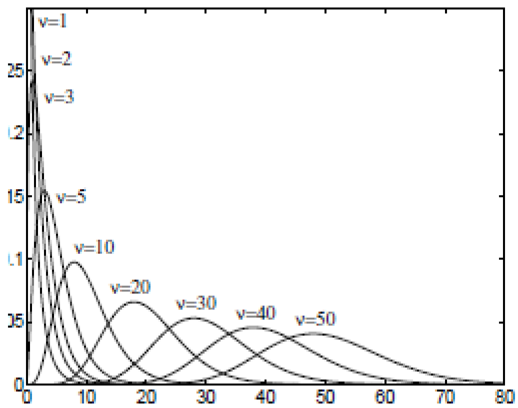
c) Z podmínky pro interval plyne

$1 - \alpha = P(U > a) = 1 - \Phi(a) \Rightarrow \Phi(a) = \alpha \Rightarrow a = u_\alpha$. Je tedy

$U > a \Leftrightarrow U > u_\alpha$.

Nyní budou následovat definice odvozených rozložení (Pearsonovo rozložení, Studentovo rozložení a Fisher-Snedecorovo rozložení) a související příklady. V definicích nepřehlédněte požadavky na nezávislost!

Definice 1.7
Nechť $U_1, \ldots, U_n$ jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, $U_i \sim N(0,1),\ i = 1, \ldots, n$.
Pak náhodná veličina $V = \sum_{i=1}^{n} U_i^2 \sim \chi^2(n)$.
Říkáme, že náhodná veličina V má Pearsonovo rozložení "chí kvadrát" a parametr n nazýváme stupně volnosti.
(Explicitní tvar hustoty lze nalézt např v příloze A Sbírky příkladů.)



Poznámka 1.8
$\alpha-$kvantil Pearsonova rozložení s n stupni volnosti značíme $\chi^2_\alpha(n)$. Tyto kvantily jsou tabelovány a pro $n > 30$ užíváme přibližný vztah $\chi^2_\alpha(n) \approx \frac{1}{2}(u_\alpha + \sqrt{2n-1})^2$

Příklad 1.9

a) Nechť $V \sim \chi^2(10)$. Najděte kvantil $\chi^2_{0,975}(10)$.

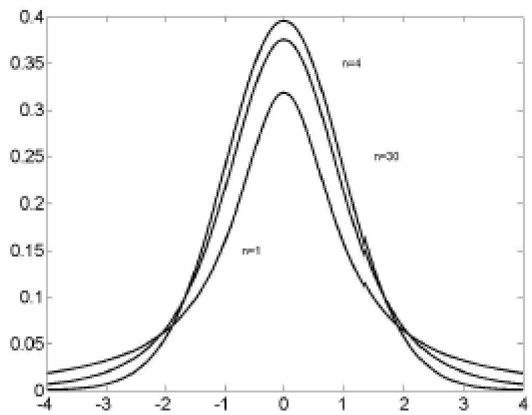
b) Nechť $V \sim \chi^2(3)$. Najděte kvantil $\chi^2_{0,05}(3)$.

Řešení

a) $\chi^2_{0,975}(10) = 20,483$.

b) $\chi^2_{0,05}(3) = 0,352$.

Definice 1.10
Nechť U, V jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, $U \sim N(0,1),\ V \sim \chi^2(n)$.
Pak náhodná veličina $T = \frac{U}{\sqrt{\frac{V}{n}}} \sim t(n)$. Říkáme, že náhodná veličina T má Studentovo rozložení s n stupni volnosti.
(Explicitní tvar hustoty lze nalézt např v příloze A Sbírky příkladů.)



Poznámka 1.11
$\alpha-$kvantil Studentova rozložení s n stupni volnosti značíme $t_\alpha(n)$. Tyto kvantily jsou tabelovány. Pro $\alpha < 0,5$ se používá přepočtový vzorec $t_\alpha(n) = -t_{1-\alpha}(n)$ a pro distribuční funkci platí vztah $F(-x) = 1 - F(x)$.

Příklad 1.12

a) Nechť $T \sim t(8)$. Najděte kvantil $t_{0,9}(8)$.

b) Nechť $T \sim t(6)$. Najděte kvantil $t_{0,05}(6)$.

Řešení

a) $t_{0,9}(8) = 1,3968$.

b) $t_{0,05}(6) = -t_{0,95}(6) = -1,9432$.

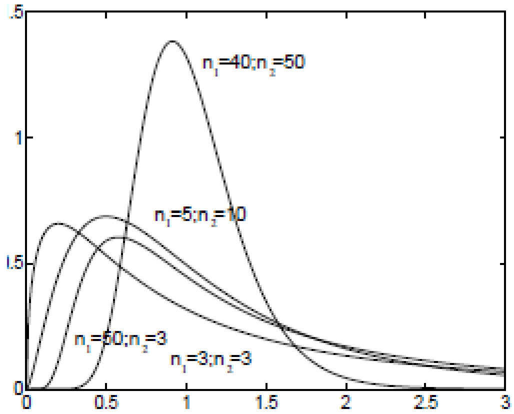
Příklad 1.13
Nechť $X \sim t(14)$. Určete konstantu c tak, aby platilo: $P(-c < X < c) = 0,9$.

Řešení
$0,9 = P(-c < X < c) = F(c) - F(-c) = F(c) - [1 - F(c)] = 2F(c) - 1$
Tedy $0,9 = 2F(c) - 1 \Rightarrow F(c) = \frac{1,9}{2} = 0,95 \Rightarrow c = t_{0,95}(14) = 1,7613$

Definice 1.14
Nechť V_1, V_2 jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, $V_1 \sim \chi^2(n_1)$, $V_2 \sim \chi^2(n_2)$.
Pak náhodná veličina $F = \frac{V_1/n_1}{V_2/n_2} \sim F(n_1, n_2)$. Říkáme, že náhodná veličina F má Fisher-Snedecorovo rozložení, kde n_1 je počet stupňů volnosti čitatele a n_2 je počet stupňů volnosti jmenovatele.

(Explicitní tvar hustoty lze nalézt např v příloze A Sbírky příkladů.)

$F(n_1, n_2)$



Poznámka 1.15
$\alpha-$kvantil Fisher-Snedecorova rozložení se stupni volnosti n_1, n_2 značíme $F_\alpha(n_1, n_2)$. Tyto kvantily jsou tabelovány. Pro $\alpha < 0,5$ se používá přepočtový vzorec $F_\alpha(n_1, n_2) = \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_2, n_1)}$.

Příklad 1.16

a) Nechť $F \sim F(5, 7)$. Najděte kvantil $F_{0,975}(5, 7)$.

b) Nechť $F \sim F(8, 6)$. Najděte kvantil $F_{0,025}(8, 6)$.

Řešení

a) $F_{0,975}(5, 7) = 5,2852$.

b) $F_{0,025}(8, 6) = \frac{1}{F_{0,975}(6,8)} = \frac{1}{4,6517} = 0,215$.

Příklad 1.17
Nechť $X \sim F(5, 8)$. Určete konstantu c tak, aby platilo: $P(X < c) = 0,05$.

Řešení
$0,05 = P(X < c) = F(c)$
Tedy $c = F_{0,05}(5, 8) = \frac{1}{F_{0,95}(8,5)} = \frac{1}{4,8183} = 0,2075$.

Nyní se budeme věnovat náhodnému vektoru s $n-$rozměrným normálním rozložením, pro jednoduchost budeme uvažovat $n = 2$. Konvenci při zapisování náhodných vektorů ilustrujme následovně:

sloupcový vektor náhodných veličin značíme velkým tlustým písmenem, např. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$

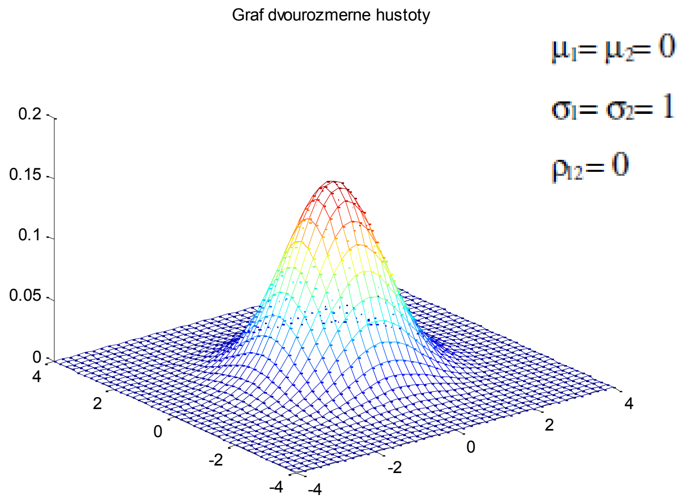
sloupcový vektor konstant značíme malým tlustým písmenem, např. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

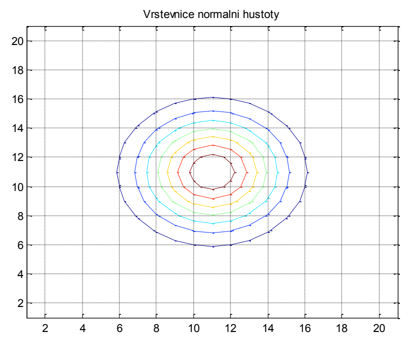
Definice 1.18
O spojitém náhodném vektoru $\mathbf{X} = \binom{X_1}{X_2}$ říkáme, že má dvojrozměrné normální rozložení s parametry $\mu = \binom{\mu_1}{\mu_2}$ a $\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$, když jeho hustota je dána vzorcem

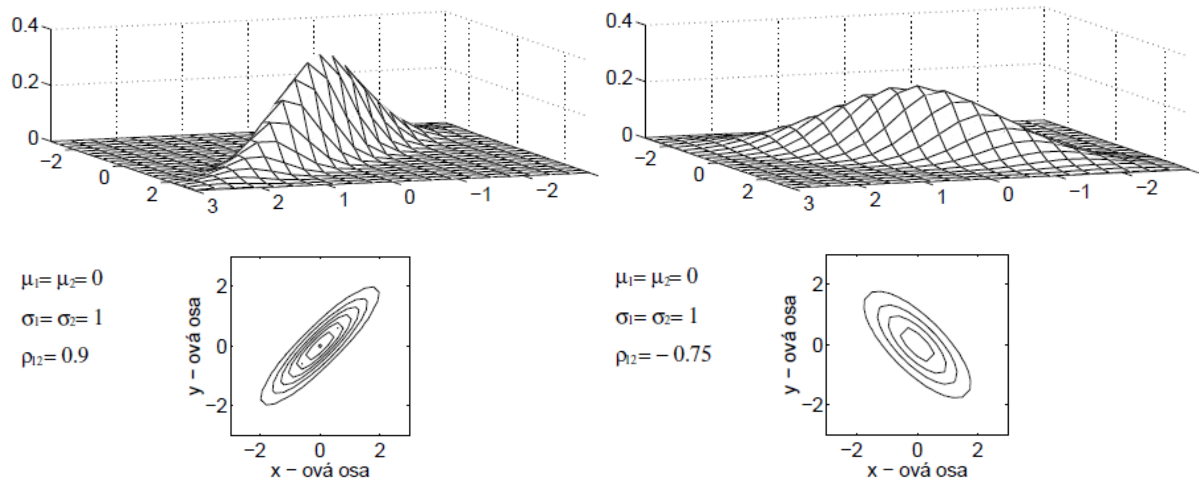
$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\cdot\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2} + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^2.$$

Zkráceně píšeme $\mathbf{X} = \binom{X_1}{X_2} \sim N_2(\mu, \mathbf{\Sigma})$.
Pro $\mu = \binom{0}{0}$ a $\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mluvíme o standardizovaném dvojrozměrném normálním rozložení.

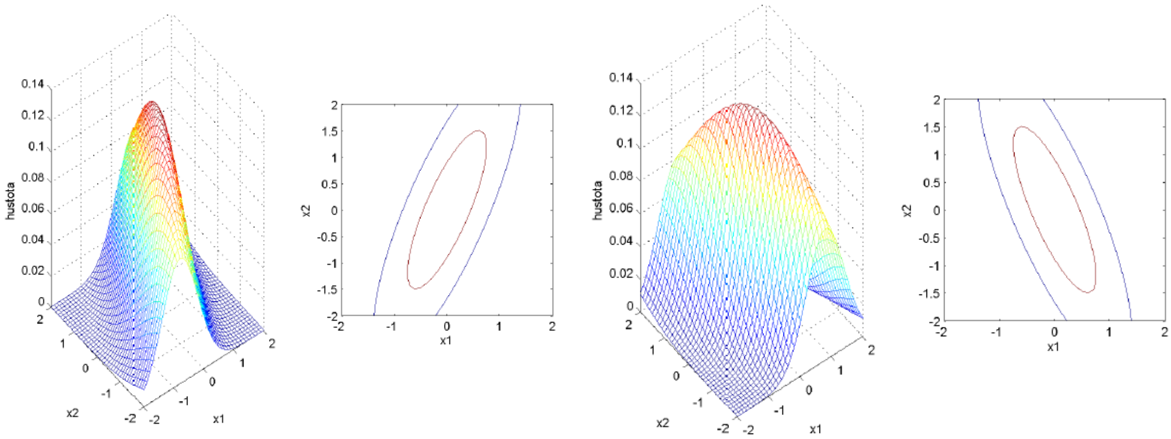
Poznámka 1.19
Význam parametrů je následující:
$\mu_1 = E(X_1),\ \mu_2 = E(X_2),\ \sigma_1^2 = D(X_1),\ \sigma_2^2 = D(X_2),\ \rho = R(X_1, X_2)$







$\mu_1 = \mu_2 = 0,\ \sigma_1 = 1,\ \sigma_2 = 2,\ \rho = 0.8$ $\qquad$ $\mu_1 = \mu_2 = 0,\ \sigma_1 = 1,\ \sigma_2 = 2,\ \rho = -0.8$



Věta 1.20
Nechť dvojrozměrný vektor $\mathbf{X}$ má dvojrozměrné normální rozložení
$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right).$
Potom pro marginální rozložení skalární náhodné veličiny X_i platí: $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2),\ i = 1, 2.$
[Složky normálního náhodného vektoru normalitu "podědí".]

Věta 1.21
Nechť $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right)$ je normální náhodný vektor, nechť $\mathrm{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ je vektor reálných čísel, nechť $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ je matice reálných čísel.
Potom transformovaný náhodný vektor $\mathbf{Y} = \mathrm{a} + \mathrm{B}\mathbf{X} \sim N_2(\mathrm{a} + \mathrm{B}\mu,\ \mathrm{B}\Sigma\mathrm{B}')$.
[Lineární transformace zachovává normalitu.]

Příklad 1.22
Nechť devizový kurs marky je náhodná veličina $X_1 \sim N(19, 0.5^2)$ a devizový kurs dolaru je náhodná veličina $X_2 \sim N(32, 0.6^2)$. Korelace $R(X_1, X_2) = -0.8$. Jaká je pravděpodobnost, že měnový koš $0.65X_1 + 0.35X_2$ bude mít hodnotu větší než 24? Návod:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N_2(\begin{pmatrix} 19 \\ 32 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.25 & -0.072 \\ -0.072 & 0.36 \end{pmatrix}$$

$$0.65X_1 + 0.35X_2 = (0.65\ 0.35) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

Příklad 1.23
Nechť kursy dvou akcií jsou náhodné veličiny $X_1 \sim N(600, 40^2)$, $X_2 \sim N(800, 30^2)$. Korelace $R(X_1, X_2) = -0.4$. Jaká je pravděpodobnost, že index $X_1 + X_2$ nepoklesne pod 1300 bodů?

Řešení
$P(X_1 + X_2 \geq 1300) =?$
Jelikož X_1, X_2 jsou korelované, nelze užít věty 1.3.c). Abychom mohli užít vět 1.20 a 1.21, musíme nejdříve určit rozložení náhodného vektoru $\mathbf{X} = \binom{X_1}{X_2}$.
$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 600 \\ 800 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1600 & -480 \\ -480 & 900 \end{pmatrix}\right)$.
(Pro prvek σ_{12} matice Σ platí: $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \rho\sigma_1\sigma_2 = -0,4 \cdot 40 \cdot 30 = -480$)
Užijeme-li ve větě 1.21 $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ potom transformovaný náhodný vektor $\mathbf{Y} = \mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 + X_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ zůstává normálně rozložený a dle věty 1.20 je normálně rozložená i každá jeho složka. Tedy náhodná veličina $Z = X_1 + X_2$ má normální rozložení a pro její parametry platí:
$E(Z) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = 600 + 800 = 1400$
$D(Z) = D(X_1 + X_2) = D(X_1) + D(X_2) + 2C(X_1, X_2) = 1600 + 900 - 2 \cdot 480 = 1540$
$Z \sim N(1400, 1540)$

$P(X_1 + X_2 \geq 1300) = P(Z \geq 1300) = 1 - P(Z \leq 1300) + \overbrace{P(Z = 1300)}^{0} =$
$= 1 - P(\frac{Z-1400}{\sqrt{1540}} \leq \frac{1300-1400}{\sqrt{1540}} = 1 - P(U \leq -2,55) = P(U \leq 2,55) = 0,9946.$
Index $X_1 + X_2$ nepoklesne pod 1300 bodů s pravděpodobností 0,9946.

Náhodný vektor $\mathbf{X}$ má vícerozměrné normální rozdělení, jestliže jeho hustota je dána vztahem

$$f(\mathbf{x}) = (2\pi)^{p/2}\ |\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2}\ \exp\left(-\frac{(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}{2}\right),$$

kde $\boldsymbol{\mu}$ je vektor středních hodnot a $\boldsymbol{\Sigma}$ je kovarianční matice.

Vícerozměrné normální rozdělení má tyto vlastnosti:

- lineární kombinace prvků z $\mathbf{X}$ mají normální rozdělení
- všechny podmnožiny $\mathbf{X}$ mají normální rozdělení
- nekorelovanost veličin z $\mathbf{X}$ (složek vektoru $\mathbf{X}$) znamená i jejich nezávislost
- všechna podmíněná rozdělení jsou normální

I pro vícerozměrné normální rozdělení je možno chápat kvadratickou formu v exponentu jako čtverec vzdálenosti vektoru $\mathbf{x}$ od vektoru $\boldsymbol{\mu}$, ve kterém je obsažena i informace z kovarinační matice

$$C^2 = (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}).$$

C je Mahalanobisova vzdálenost, pro zvolenou hodnotu $f(\mathbf{x})$ její čtverec je geometricky plocha elipsoidu se středem μ a osami $c\sqrt{\lambda_j \mathbf{v}_j}$ pro $j = 1, 2, \cdots, p$, kde λ_j jsou vlastní čísla matice $\boldsymbol{\Sigma}$ a $\mathbf{v}_j$ jsou vlastní vektory matice $\boldsymbol{\Sigma}$.

$$C^2 = (\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}) \sim \chi^2(p)$$