

5. Úvod do testování hypotéz. Porovnání empirického a teoretického rozložení

5.1. Motivace k testování hypotéz.

Častým úkolem statistika je na základě dat ověřit předpoklady o parametrech nebo typu rozložení, z něhož pochází náhodný výběr. Takovému předpokladu se říká nulová hypotéza. Nulová hypotéza vyjadřuje nějaký teoretický předpoklad, často skeptického rázu a uživatel ji musí stanovit předem, bez přihlídnutí k datovému souboru. Proti nulové hypotéze stavíme alternativní hypotézu, která říká, co platí, když neplatí nulová hypotéza. Alternativní hypotéza je formulována tak, aby mohla platit jenom jedna z těchto dvou hypotéz. Pravdivost alternativní hypotézy by znamenala objevení nějakých nových skutečností nebo zásadnější změnu v dosavadních představách.

Např. výzkumník by chtěl na základě dat prověřit tezi (nový objev), že pasivní kouření škodí zdraví. Jako nulovou hypotézu tedy položí tvrzení, že pasivní kouření neškodí zdraví a proti nulové hypotéze postaví alternativní, že pasivní kouření škodí zdraví.

Testováním hypotéz se myslí rozhodovací postup, který je založen na daném náhodném výběru a s jehož pomocí rozhodneme o zamítnutí či nezamítnutí nulové hypotézy.

5.2. Definice: Definice nulové a alternativní hypotézy.

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rozložení $L(\underline{Q})$, kde parametr \underline{Q} neznáme. Nechť $h(\underline{Q})$ je parametrická funkce a c daná reálná konstanta.

a) Oboustranná alternativa: Tvrzení $H_0: h(\underline{Q}) = c$ se nazývá jednoduchá nulová hypotéza. Proti nulové hypotéze postavíme složenou oboustrannou alternativní hypotézu $H_1: h(\underline{Q}) \neq c$.

b) Levostranná alternativa: Tvrzení $H_0: h(\underline{Q}) \geq c$ se nazývá složená pravostranná nulová hypotéza. Proti jednoduché nebo složené pravostranné nulové hypotéze postavíme složenou levostrannou alternativní hypotézu $H_1: h(\underline{Q}) < c$.

c) Pravostranná alternativa: Tvrzení $H_0: h(\underline{Q}) \leq c$ se nazývá složená levostranná nulová hypotéza. Proti jednoduché nebo složené levostranné nulové hypotéze postavíme složenou pravostrannou alternativní hypotézu $H_1: h(\underline{Q}) > c$.

Testováním H_0 proti H_1 rozumíme rozhodovací postup založený na náhodném výběru

X_1, \dots, X_n , s jehož pomocí zamítneme či nezamítneme platnost nulové hypotézy.

(Volba alternativní hypotézy není libovolná, ale vyplývá z konkrétní situace. Např. při současné technologii je pravděpodobnost výroby zmetku $\underline{Q} = 0,01$.

a) Po rekonstrukci výrobní linky byla obnovena výroba, přičemž technologie zůstala stejná. Chceme ověřit, zda se změnila kvalita výrobků. Testujeme $H_0: \underline{Q} = 0,01$ proti $H_1: \underline{Q} \neq 0,01$.

b) Byly provedeny změny v technologii výroby s cílem zvýšit kvalitu. V tomto případě tedy testujeme $H_0: \underline{Q} = 0,01$ proti $H_1: \underline{Q} < 0,01$.

c) Byly provedeny změny v technologii výroby s cílem snížit náklady. V této situaci testujeme $H_0: \underline{Q} = 0,01$ proti $H_1: \underline{Q} > 0,01$.)

5.3. Definice: Definice chyby 1. a 2. druhu.

Při testování H_0 proti H_1 se můžeme dopustit jedné ze dvou chyb: chyba 1. druhu spočívá v tom, že H_0 zamítneme, ač ve skutečnosti platí a chyba 2. druhu spočívá v tom, že H_0 nezamítneme, ač ve skutečnosti neplatí. Situaci přehledně znázorňuje tabulka:

skutečnost	rozhodnutí	
	H_0 nezamítáme	H_0 zamítáme
H_0 platí	správné rozhodnutí	chyba 1. druhu
H_0 neplatí	chyba 2. druhu	správné rozhodnutí

Pravděpodobnost chyby 1. druhu se značí α a nazývá se hladina významnosti testu (většinou bývá $\alpha = 0,05$, méně často 0,1 či 0,01). Pravděpodobnost chyby 2. druhu se značí β . Číslo $1-\beta$ se nazývá síla testu a vyjadřuje pravděpodobnost, že bude H_0 zamítnuta za předpokladu, že neplatí. Obvykle se snažíme, aby síla testu byla aspoň 0,8. Obě hodnoty, α i $1-\beta$, závisí na velikosti efektu, který se snažíme detekovat. Čím drobnější efekt, tím musí být větší rozsah náhodného výběru.

5.4. Poznámka: Testování nulové hypotézy proti alternativní hypotéze třemi způsoby.

Testování nulové hypotézy proti alternativní hypotéze lze provést pomocí kritického oboru, pomocí intervalu spolehlivosti nebo pomocí p-hodnoty.

5.5. Definice: Definice testového kritéria, oboru nezamítnutí, kritického oboru a kritických hodnot.

Statistika $T_0 = T_0(X_1, \dots, X_n)$ se nazývá testovým kritériem. Množina všech hodnot, jichž může testové kritérium nabýt, se rozpadá na obor nezamítnutí nulové hypotézy (značí se V) a obor zamítnutí nulové hypotézy (značí se W a nazývá se též kritický obor). Tyto dva obory jsou odděleny kritickými hodnotami (pro danou hladinu významnosti α je lze najít ve statistických tabulkách).

5.6. Věta: Rozhodnutí o nulové hypotéze pomocí realizace testového kritéria v oboru nezamítnutí či v kritickém oboru.

Jestliže číselná realizace t_0 testového kritéria T_0 padne do kritického oboru W , pak nulovou hypotézu zamítáme na hladině významnosti α a znamená to

skutečné vyvrácení testované hypotézy. Jestliže t_0 padne do oboru nezamítnutí V , pak jde o pouhé mlčení, které platnost nulové hypotézy jenom připouští.

5.7. Věta: Stanovení kritického oboru v případě oboustranné alternativy, levostranné alternativy, pravostranné alternativy.

Kritický obor v případě oboustranné alternativy má tvar

$$W = \{ \min K_{\alpha/2}(T) \leq T \leq \max K_{1-\alpha/2}(T) \}$$

kde $K_{\alpha/2}(T)$ a $K_{1-\alpha/2}(T)$ jsou kvantily rozložení, jímž se řídí testové kritérium T_0 , je-li nulová hypotéza pravdivá.

Kritický obor v případě levostranné alternativy má tvar:

$$W = \{ T \leq K_{\alpha}(T) \}$$

Kritický obor v případě pravostranné alternativy má tvar:

$$W = \{ T \geq K_{1-\alpha}(T) \}$$

5.8. Poznámka: Doporučený postup při testování nulové hypotézy proti alternativní hypotéze pomocí kritického oboru.

- Stanovíme nulovou hypotézu a alternativní hypotézu. Přitom je vhodné zvolit jako alternativní hypotézu ten předpoklad, jehož přijetí znamená závažné opatření a mělo by k němu dojít jen s malým rizikem omylu.

- Zvolíme hladinu významnosti α . Zpravidla volíme $\alpha = 0,05$, méně často 0,1 nebo 0,01.

- Najdeme vhodné testové kritérium a na základě zjištěných dat vypočítáme jeho realizaci.

- Jestliže realizace testového kritéria padla do kritického oboru, nulovou hypotézu zamítáme na hladině významnosti α a přijímáme alternativní hypotézu. V opačném případě nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti α .

- Na základě rozhodnutí, které jsme učinili o nulové hypotéze, učiníme nějaké konkrétní opatření, např. seřídíme obráběcí stroj.

(Při testování hypotéz musíme mít k dispozici odpovídající nástroje, nejlépe vhodný statistický software. Nemáme-li ho k dispozici, musíme znát příslušné vzorce. Dále potřebujeme statistické tabulky a kalkulačku.)

5.9. Věta: Testování nulové hypotézy proti alternativní hypotéze pomocí $100(1-\alpha)\%$ empirického intervalu spolehlivosti pro parametrickou funkci h_{θ} .

Sestrojíme $100(1-\alpha)\%$ empirický interval spolehlivosti pro parametrickou funkci $h(\underline{Q})$. Pokryje-li tento interval hodnotu c , pak H_0 nezamítáme na hladině významnosti α , v opačném případě H_0 zamítáme na hladině významnosti α .

Pro test H_0 proti oboustranné alternativě sestrojíme oboustranný interval spolehlivosti.

Pro test H_0 proti levostranné alternativě sestrojíme pravostranný interval spolehlivosti.

Pro test H_0 proti pravostranné alternativě sestrojíme levostranný interval spolehlivosti.

5.10. Věta: Testování nulové hypotézy proti alternativní hypotéze pomocí p-hodnoty.

p-hodnota udává nejnižší možnou hladinu významnosti pro zamítnutí nulové hypotézy. Je to riziko, že bude zamítnuta H_0 za předpokladu, že platí (riziko planého poplachu). Jestliže p-hodnota $\leq \alpha$, pak H_0 zamítáme na hladině významnosti α , je-li p-hodnota $> \alpha$, pak H_0 nezamítáme na hladině významnosti α .

Způsob výpočtu p-hodnoty:

Pro oboustrannou alternativu $p = 2 \min\{P(T_0 \leq t_0), P(T_0 \geq t_0)\}$.

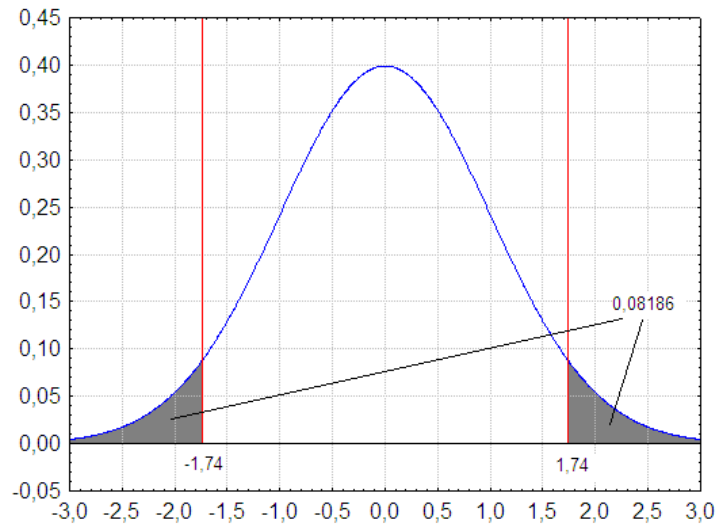
Pro levostrannou alternativu $p = P(T_0 \leq t_0)$.

Pro pravostrannou alternativu $p = P(T_0 \geq t_0)$.

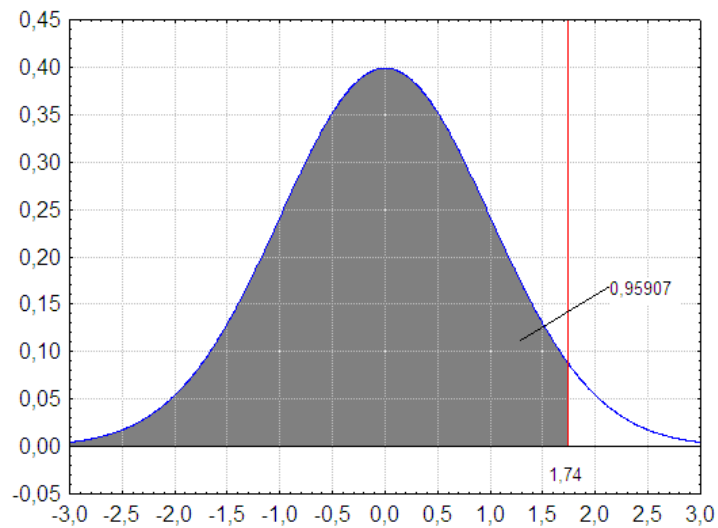
(p-hodnota vyjadřuje pravděpodobnost, s jakou číselné realizace x_1, \dots, x_n náhodného výběru X_1, \dots, X_n podporují H_0 , je-li pravdivá. Statistické programové systémy poskytují ve svých výstupech p-hodnotu. Její výpočet vyžaduje znalost distribuční funkce rozložení, kterým se řídí testové kritérium T_0 , je-li H_0 pravdivá. Vzhledem k tomu, že v běžných statistických tabulkách jsou uvedeny pouze hodnoty distribuční funkce standardizovaného normálního rozložení, bez použití speciálního software jsme schopni vypočítat p-hodnotu pouze pro test hypotézy o střední hodnotě normálního rozložení při známém rozptylu.)

5.11. Poznámka: Ilustrace významu p-hodnoty.

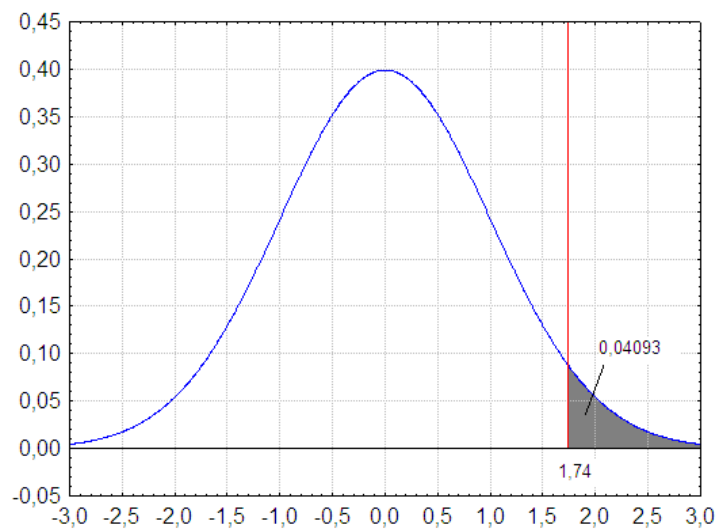
Oboustranný test



Levostranný test



Pravostranný test



5.12. Příklad: Necht' X_1, \dots, X_{400} je náhodný výběr z $N(\mu, 0,01)$. Je známo, že výběrový průměr se realizoval hodnotou 0,01. Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu $H_0: \mu = 0$ proti pravostranné alternativě $H_1: \mu > 0$

- pomocí intervalu spolehlivosti
- pomocí kritického oboru
- pomocí p-hodnoty.

Řešení:

ad a) Při testování nulové hypotézy proti pravostranné alternativě používáme levostranný interval spolehlivosti.

$$d = \bar{x} - z_{0,95} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,01 - 1,64485 \cdot 0,01 = -0,0164485$$

Protože číslo $c = 0$ neleží v intervalu $(-0,0164485; \infty)$, H_0 zamítáme na hladině významnosti 0,05.

ad b) Vypočteme realizaci testové statistiky:

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{0,01 - 0}{\frac{0,01}{\sqrt{400}}} = 2$$

Stanovíme kritický obor:

$$W = [u_{1-\alpha}, \infty) = [u_{0,95}, \infty) = [1,64485, \infty)$$

Protože testová statistika se realizuje v kritickém oboru, H_0 zamítáme na hladině významnosti 0,05.

ad c) Při testování nulové hypotézy proti pravostranné alternativě se p-hodnota počítá podle vzorce: $p = P(T_0 \geq t_0)$. V našem případě: $p = P(T_0 > 2) = 0,054 = 5,4\%$. Protože p-hodnota je menší než hladina významnosti 0,05, H_0 zamítáme na hladině významnosti 0,05.

Porovnání empirického a teoretického rozložení

5.13. Motivace: Možnost použití statistických testů je podmíněna nějakými předpoklady o datech. Velmi často je to předpoklad o typu rozložení, z něhož získaná data pocházejí. Mnoho testů je založeno na předpokladu normality. Opomíjení předpokladů o typu rozložení může v praxi vést i ke zcela zavádějícím výsledkům, proto je nutné věnovat tomuto problému patřičnou pozornost.

5.14. Popis Kolmogorovova – Smirnovova testu a jeho Lilieforsovy varianty
Testujeme hypotézu, která tvrdí, že náhodný výběr X_1, \dots, X_n pochází z rozložení s distribuční funkcí $\Phi(x)$. Nechť $F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{X_i \leq x}$ je výběrová distribuční funkce. Testovou statistikou je statistika $D_n = \max\{F_n(x) - \Phi(x), \Phi(x) - F_n(x)\}$.
Nulovou hypotézu zamítáme na hladině významnosti α , když $D_n \geq D_n(\alpha)$, kde $D_n(\alpha)$ je tabelovaná kritická hodnota.

(Pro $n \geq 30$ lze $D_n(\alpha)$ aproximovat výrazem $\sqrt{\frac{1}{2n} \ln \frac{1}{\alpha}}$.)

Upozornění: Nulová hypotéza musí specifikovat distribuční funkci zcela přesně, včetně všech jejích případných parametrů. Např. K-S test lze použít pro testování hypotézy, že náhodný výběr X_1, \dots, X_n pochází z rozložení $Rs(0,1)$, což se využívá při testování generátorů náhodných čísel.

Lilieforsova modifikace Kolmogorovova – Smirnovova testu

Nechť nulová hypotéza tvrdí, že náhodný výběr pochází z normálního rozložení, jehož parametry μ a σ^2 neznáme. Tyto parametry musíme odhadnout z dat. Tím se změní rozložení testové statistiky D_n . V takovém případě jde o **Lilieforsovu modifikaci** Kolmogorovova – Smirnovova testu. Příslušné modifikované kvantily byly určeny pomocí simulačních studií.

Poznámka ke K-S testu ve STATISTICE: Test normality poskytuje hodnotu testové statistiky (ozn. d) a dvě p-hodnoty. První se vztahuje k případu, kdy μ a σ^2 známe předem, druhá (ozn. Liliefors p) se vztahuje k případu, kdy μ a σ^2 neznáme. Objeví-li se ve výstupu $p = n.s.$ (tj. non significant), pak hypotézu o normalitě nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

5.15. Příklad: Jsou dány hodnoty 10, 12, 8, 9, 16. Pomocí Lilieforsovy varianty K- S testu ověřte na hladině významnosti 0,05, zda tato data pocházejí z normálního rozložení.

Řešení: Odhadem střední hodnoty je výběrový průměr $m = 11$, odhadem rozptylu je výběrový rozptyl $s^2 = 10$. Uspořádaný náhodný výběr je (8, 9, 10, 12, 16). Vypočteme hodnoty výběrové distribuční funkce:

$$x_{(1)} \leq F_5(x) = 0,2 \leq F_5(x) = 0,29 \leq F_5(x) = 0,4$$

$$1 \leq F_5(x) = 0,51 \leq F_5(x) = 0,63 \leq F_5(x) = 0,7106$$

Hodnoty teoretické distribuční funkce $\Phi_T(x)$ v bodech 8, 9, 10, 12, 16:

$$\Phi\left(\frac{8-10}{10}\right) = 0,25 = 0,25 = 0,2580 = 0,2580$$

$$\Phi\left(\frac{9-10}{10}\right) = 0,3 = 0,3 = 0,3543 = 0,3543$$

$$\Phi\left(\frac{10-10}{10}\right) = 0,5 = 0,5 = 0,5255 = 0,5255$$

$$\Phi\left(\frac{12-10}{10}\right) = 0,7 = 0,7 = 0,7552 = 0,7552$$

$$\Phi\left(\frac{16-10}{10}\right) = 0,95 = 0,95 = 0,9429 = 0,9429$$

(Φ je distribuční funkce rozložení $N(0,1)$.)

Rozdíly mezi výběrovou distribuční funkcí $F_5(x)$ a teoretickou distribuční funkcí $\Phi_T(x)$:

$$d_1 = 0,2 - 0,17106 = 0,02894; d_2 = 0,4 - 0,26435 = 0,13565; d_3 = 0,6 - 0,37448 = 0,22552;$$

$$d_4 = 0,8 - 0,62552 = 0,17448; d_5 = 1 - 0,94295 = 0,05705.$$

Testová statistika: $D_5 = 0,22552$, modifikovaná kritická hodnota pro $n = 5$, $\alpha = 0,05$ je 0,343. Protože $0,22552 < 0,343$, hypotézu o normalitě nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

5.16. Popis Shapirova – Wilkova testu

Testujeme hypotézu, která tvrdí, že náhodný výběr X_1, \dots, X_n pochází z rozložení $N(\mu, \sigma^2)$.

Testová statistika má tvar:

$$W = \frac{\sum_{i=1}^m a_i^n |X_{(i)} - \bar{X}|}{\sqrt{\sum_{i=1}^m X_i^2 - n\bar{X}^2}}$$

kde $m = n/2$ pro n sudé a $m = (n-1)/2$ pro n liché. Koefficienty $a_i^{(n)}$ jsou tabelovány.

Na testovou statistiku W lze pohlížet jako na korelační koeficient mezi uspořádanými pozorováními a jim odpovídajícími kvantily standardizovaného normálního rozložení. V případě, že data vykazují perfektní shodu s normálním rozložením, bude mít W hodnotu 1. Hypotézu o normalitě tedy zamítneme na

hladině významnosti α , když se na této hladině neprokáže korelace mezi daty a jim odpovídajícími kvantily rozložení $N(0,1)$.

Lze také říci, že S – W test je založen na zjištění, zda body v Q-Q grafu jsou významně odlišné od regresní přímky proložené těmito body.

(S-W test se používá především pro výběry menších rozsahů, $n < 50$, ale v systému STATISTICA je implementováno jeho rozšíření i na výběry velkých rozsahů, kolem 2000.)

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

V sedmi náhodně vybraných prodejnách byly zjištěny následující ceny určitého druhu zboží (v Kč): 35, 29, 30, 33, 45, 33, 36. Rozhodněte pomocí Lilieforsovy varianty K-S testu a S-W testu na hladině významnosti 0,05, zda lze tyto ceny považovat za realizace náhodného výběru z normálního rozložení.

Řešení:

Otevřeme nový datový soubor o jedné proměnné a 7 případech. Do proměnné X jsou zapíšeme zjištěné ceny.

Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Tabulky četností - OK – Proměnné X, OK – Normalita – zaškrtneme Lilieforsův test a Shapiro - Wilksův W test – Testy normality

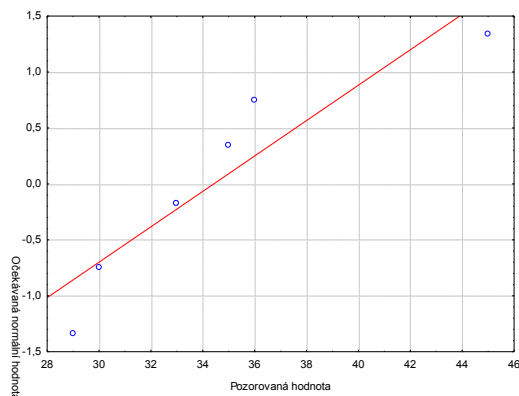
Proměnná	Testy normality (Tabulka 22)			
	N	max Lilliefors	W	p
X	7	0,240	0,868	0,180

V tabulce je uvedena hodnota testové statistiky pro Lilieforsův test ($d = 0,24029$) a pro S-W test ($W = 0,86866$) a odpovídající p-hodnoty. Lilieforsovo p je počítáno na základě parametrů odhadnutých z dat. V našem případě $p > 0,2$ a pro S-W test $p = 0,18068$. Ani jeden z testů nezamítá nulovou hypotézu o normalitě.

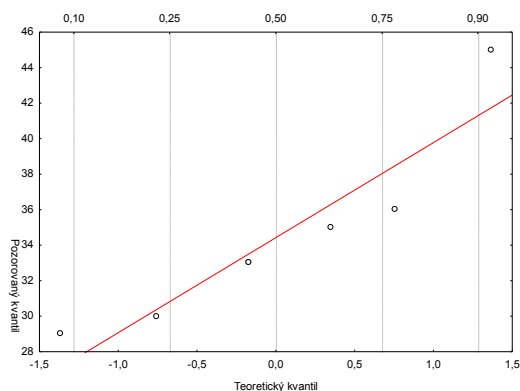
Výpočet doplníme normálním pravděpodobnostním grafem a kvantil – kvantilovým grafem:

Graphs – 2D Graphs - Normal Probability Plots (resp. Quantile- Quantile plot)- Variables X – OK.

N-P plot



Q-Q plot



5.17. Popis testu dobré shody v diskrétním a spojitém případě

Testujeme hypotézu, která tvrdí, že náhodný výběr X_1, \dots, X_n pochází z rozložení s distribuční funkcí $\Phi(x)$.

- Je-li distribuční funkce spojitá, pak data rozdělíme do r třídících intervalů $[u_j, u_{j+1})$, $j = 1, \dots, r$. Zjistíme absolutní četnost n_j j -tého třídícího intervalu a vypočteme pravděpodobnost p_j , že náhodná veličina X s distribuční funkcí $\Phi(x)$ se bude realizovat v j -tém třídícím intervalu. Platí-li nulová hypotéza, pak $p_j = \Phi(u_{j+1}) - \Phi(u_j)$.
- Má-li distribuční funkce nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti, pak místo třídících intervalů použijeme varianty $x_{[j]}$, $j = 1, \dots, r$. Pro variantu $x_{[j]}$ zjistíme absolutní četnost n_j a vypočteme pravděpodobnost p_j , že náhodná veličina X s distribuční funkcí $\Phi(x)$ se bude realizovat variantou $x_{[j]}$. Platí-li nulová hypotéza, pak $p_j = \Phi(x_{[j]}) - \Phi(x_{[j-1]})$.

Testová statistika:
$$K = \sum_{j=1}^r \frac{n_j - np_j^2}{np_j}$$

Platí-li nulová hypotéza, pak $K \approx \chi^2(r-1-p)$, kde p je počet odhadovaných parametrů daného rozložení. (Např. pro normální rozložení $p = 2$, protože z dat odhadujeme střední hodnotu a rozptyl.) Nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti α , když $K \geq \chi^2_{1-\alpha}(r-1-p)$. Aproximace se považuje za vyhovující, když tzv. teoretické četnosti $np_j \geq 5$, $j = 1, \dots, r$.

Upozornění: Hodnota testové statistiky K je silně závislá na volbě třídících intervalů. Navíc při nesplnění podmínky $np_j \geq 5$, $j = 1, \dots, r$ je třeba některé intervaly resp. varianty slučovat, což vede ke ztrátě informace.

5.18. Příklad (test dobré shody pro diskrétní rozložení): Byl zjišťován počet poruch určitého zařízení za 100 hodin provozu ve 150 disjunktních 100 h intervalech. Výsledky měření:

Počet poruch za 100 hodin provozu 0 1 2 3 4 a víc

Absolutní četnost 52 48 36 10 4

Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že náhodný výběr X_1, \dots, X_{150} pochází z rozložení $Po(1,2)$.

Řešení:

Pravděpodobnost, že náhodná veličina s rozložením $Po(\lambda)$, kde $\lambda = 1,2$ bude nabývat hodnot p_0, \dots, p_4 a víc je

$$p_j = \frac{e^{-\lambda} \lambda^j}{j!}, j = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Výpočty potřebné pro stanovení testové statistiky K uspořádáme do tabulky.

j	n_j	p_j	np_j	$\frac{n_j - np_j}{np_j}$
0	52	0,301	150.0,301=45,15	1,039
1	48	0,361	150.0,361=54,15	0,698
2	36	0,217	150.0,217=32,55	0,366
3	10	0,087	150.0,087=13,05	0,713
4	4	0,034	150.0,034=5,1	0,237

$K = 1,039 + 0,698 + 0,713 + 0,237 = 3,053$, $r = 5$, $\chi^2_{0,95}(4) = 9,488$. Protože $3,053 < 9,488$, nulovou hypotézu nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Vytvoříme datový soubor o dvou proměnných (POČET a ČETNOST) a pěti případech a zapíšeme do něj hodnoty 0 1 2 3 4 a 52 48 36 10 4.

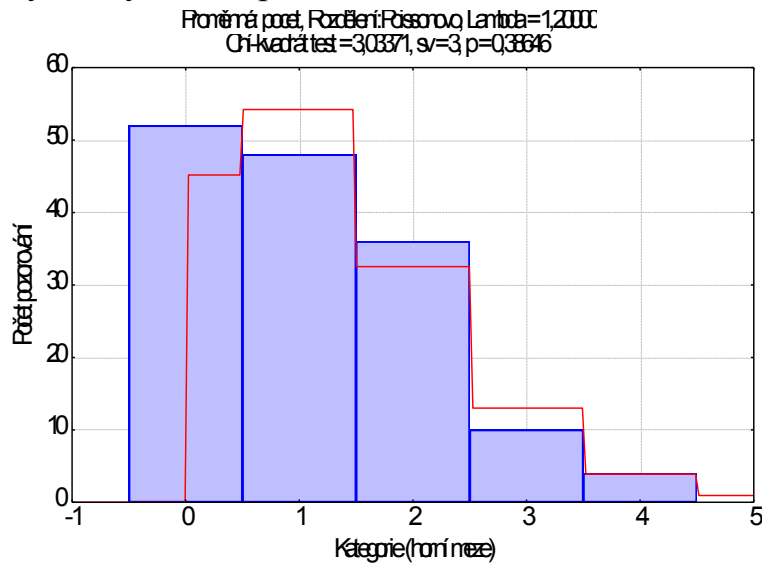
Statistiky – Prokládání rozdělení – Diskrétní rozdělení – Poissonovo – OK – Proměnná POČET – Proměnná vah ČETNOST – Stav zapnuto – OK – Parametry Lambda 1,2, OK.

Kategorie	Proměnná: pocet, Rozdělení: Poissonovo, Lambda = 1,20000 (1) Chi-kvadrát = 3,03371, sv = 3, p = 0,38646							
	Pozorov. Četnos	Kumul. Pozorov.	Procer. Pozorov.	Kumul. Pozorov.	Oček. Četnc	Kumula. Očeká	Proce. Očeká	Kumul. Očeká
<= 0,000	52	52	34,66	34,66	45,17	45,17	30,11	30,11
1,00000	48	100	32,00	66,66	54,21	99,38	36,14	66,25
2,00000	36	136	24,00	90,66	32,52	131,90	21,68	87,93
3,00000	10	146	6,66	97,33	13,01	144,91	8,67	96,60
< Nekonec	4	150	2,66	100,00	5,06	150,00	3,37	100,00

Ve výstupní tabulce je uvedena hodnota testového kritéria (3,03371) a odpovídající p-hodnota (0,38646). Nulová hypotéza se tedy nezamítá na asymptotické hladině významnosti 0,05.

(Podmínky dobré aproximace jsou splněny, všechny teoretické četnosti - uvedené ve sloupci Očekávané četnosti – jsou větší než 5.)

Pro vytvoření grafu se vrátíme do Proložení diskretních rozložení – Základní výsledky – Graf pozorovaného a očekávaného rozdělení.



5.19. Příklad (test dobré shody pro spojité rozložení): Byl pořízen náhodný výběr rozsahu $n = 100$. Jeho číselné realizace byly rozříděny do 5 ekvidistantních třídicích intervalů o délce 0,04, přičemž dolní mez prvního třídicího intervalu je 3,92. Absolutní četnosti jednotlivých třídicích intervalů jsou: 11, 20, 44, 19, 6.

Výběrový průměr se realizoval hodnotou $m = 4,02$ a výběrová směrodatná odchylka hodnotou $s = 0,04$.

Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že náhodný výběr pochází z normálního rozložení.

Řešení:

Výpočty potřebné pro stanovení testové statistiky K uspořádáme do tabulky.

Přitom symbolem Φ značíme distribuční funkci rozložení $N(\mu, \sigma^2)$, kde $\mu = 4,02$ a $\sigma = 0,04$.

μ_j, u_{j+}	n_j	$p_j = \Phi(u_{j+1}) - \Phi(u_j)$	np_j	$(n_j - np_j)^2$	$\frac{(n_j - np_j)^2}{np_j}$
3,92396	11	0,060598	6,0598	24,4060	4,0276
3,96400	20	0,241730	24,1730	17,4142	0,7204
4,00404	44	0,382925	38,2925	32,5756	0,8507
4,04408	19	0,241730	24,1730	26,7608	1,1070
4,08412	6	0,060598	6,0598	0,0036	0,0006

$$K = 4,0276 + 0,7204 + 0,8507 + 1,1070 + 0,0006 = 6,7063$$

Kritický obor: $W = \chi^2_{1-\alpha, r-1, p, \infty} = \chi^2_{0,95, 5-1, \infty} = 5,9915$

Protože testová statistika se realizuje v kritickém oboru, hypotézu o normalitě zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Protože nemáme k dispozici původní data, ale jenom třídící intervaly a jejich četnosti, do nového datového souboru o dvou proměnných x_j a n_j zadáme středy třídících intervalů a jejich absolutní četnosti:

	1. x_j	2. n_j
1	3,9	1
2	3,9	2
3	4,0	4
4	4,0	1
5	4,0	6

Statistiky – Prokládání rozdělení – ponecháme implicitní nastavení pro Normální rozdělení – OK – Proměnná x_j – klikneme na ikonu se závažím – Proměnná vah n_j – Stav Zapnuto – OK – Parametry – Počet kategorií 5, Průměr 4,02, Rozptyl 0,0016, OK.

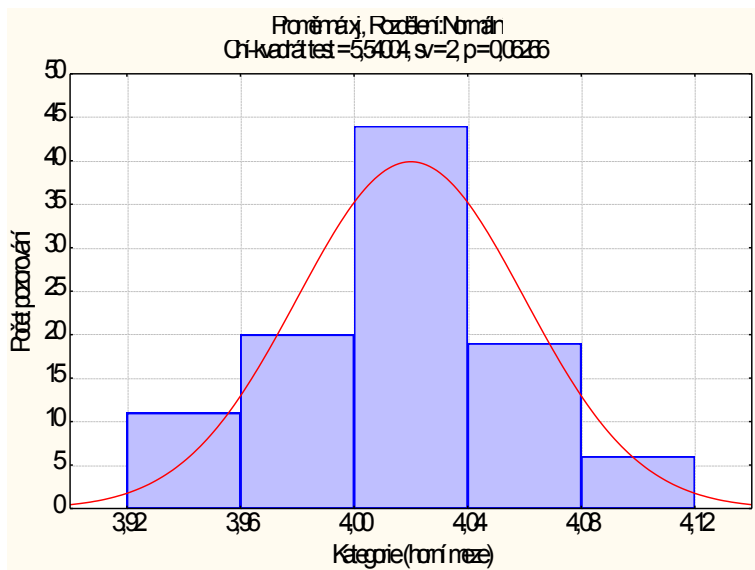
Dostaneme výstupní tabulku:

Proměnná rozdělení: Normální (Tabulka 10) Chi-kvadrát = 5,54004, sv = 2, p = 0,06266								
Horní hranice	Pozorov. Cetnos	Kumulat. Pozorov.	Procer. Pozorov.	Kumul. Pozorov.	Oček. Cetnc	Kumula. Očeká.	Proce. Očeká.	Kumul. Očeká.
<= 3,960	1	1	11,00	11,00	6,68	6,68	6,68	6,68
4,00000	2	3	20,00	31,00	24,17	30,85	24,17	30,85
4,04000	4	7	44,00	75,00	38,29	69,14	38,29	69,14
4,08000	1	9	19,00	94,00	24,17	93,31	24,17	93,31
< Nekonec	6	10	6,00	100,0	6,68	100,0	6,68	100,0

V záhlaví výstupní tabulky je uvedena hodnota testového kritéria (5,54004), počet stupňů volnosti = 2 a p-hodnota (0,06266). Nulová hypotéza se tedy nezamítá na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Rozdíl oproti ručnímu výpočtu je způsoben tím, že systém STATISTICA uvažuje první interval $[-16, \infty)$ a poslední interval $(408, \infty)$.

Pro vytvoření grafu se vrátíme do Proložení spojitých rozdělení – Základní výsledky – Graf pozorovaného a očekávaného rozdělení.



5.20. Poznámka: Test dobré shody může být použit i v těch případech, kdy rozložení, z něhož daný náhodný výběr pochází, neodpovídá nějakému známému rozložení (např. exponenciálnímu, normálnímu, Poissonovu, ...), ale je určeno intuitivně nebo na základě zkušenosti.

5.21. Příklad: Ve svých pokusech pozoroval J.G. Mendel 10 rostlin hrachu a na každé z nich počet žlutých a zelených semen. Výsledky pokusu:

č.rostliny	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
počet žlutých semen	25	32	14	70	24	20	32	44	50	44
počet zelených semen	11	7	5	27	13	6	13	9	14	18
celkem	36	39	19	97	37	26	45	53	64	62

Z genetických modelů vyplývá, že pravděpodobnost výskytu žlutého semene by měla být 0,75 a zeleného 0,25. Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že výsledky Mendelových pokusů se shodují s modelem.

Řešení:

Výpočty potřebné pro stanovení testové statistiky K uspořádáme do tabulky.

j	n_j	p_j	np_j	$\frac{n_j - np_j}{np_j}$
1	25	0,75	$36 \cdot 0,75 = 27$	0,148148
2	32	0,75	$39 \cdot 0,75 = 29,25$	0,258547
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10	44	0,75	$62 \cdot 0,75 = 46,5$	0,134409

$$K = 0,148148 + 0,258547 + \dots + 0,134409 = 1,797495, r = 10, \chi^2_{0,95}(9) = 16,9.$$

Protože $1,797495 < 16,9$, nulovou hypotézu nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Vytvoříme datový soubor se třemi proměnnými Celkem, X a Y a 10 případy. Do proměnné Celkem zapíšeme celkový počet žlutých a zelených semen, do X zapíšeme pozorované absolutní četnosti žlutých semen, do proměnné Y vypočítané teoretické četnosti (v našem případě Celkem*0,75).

Statistiky – Neparametrická statistika – Pozorované vs. očekávané χ^2 – Proměnné Pozorované četnosti X, Očekávané četnosti Y, OK – Výpočet.

Pozorované vs. očekávané četnosti				
Chi-Kvadr. = 1,797495 sv = 9 p = 0,99428				
POZN.: Nestejné součty pozor.				
Případ	pozorované X	očekávané Y	P - C	(P-O) ² /O
C:	25,00	27,00	-2,000	0,148
C:	32,00	29,25	2,750	0,258
C:	14,00	14,25	-0,250	0,004
C:	70,00	72,75	-2,750	0,103
C:	24,00	27,75	-3,750	0,506
C:	20,00	19,50	0,500	0,012
C:	32,00	33,75	-1,750	0,090
C:	44,00	39,75	4,250	0,454
C:	50,00	48,00	2,000	0,083
C:	44,00	46,50	-2,500	0,134
Sct	355,0	358,5	-3,500	1,797

Ve výstupní tabulce najdeme hodnotu testové statistiky (Chi-Kvadr. = 1,797495) a odpovídající p-hodnotu, kterou porovnáme se zvolenou hladinou významnosti. V našem případě je p-hodnota 0,99428, takže nulová hypotéza se nezamítá na asymptotické hladině významnosti 0,05.