Algebra I - 2011/12 - zápočtová písemka - skupina A

1. Faktorová grupa.

Nechť $(G, \cdot)$ je grupa všech matic tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 1 & 0 \\ b & 2c & 1 \end{pmatrix},$$

kde $a, b, c \in \mathbb{Z}$, spolu s operací násobení matic. Uvažujme v G podmnožinu

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4a & 1 & 0 \\ 4b & 4a & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ověřte, že H je normální podgrupou grupy $(G, \cdot)$. Určete, které grupě je izomorfní grupa $(G, \cdot)/H$, a svoje tvrzení dokažte.

Algebra I - 2011/12 - zápočtová písemka - skupina A

2. Inverze ve faktorových okruzích.

Uvažujme polynomy $f = x^5 + x^4 + 1,\ g = x^3 + x^2 + 1,\ h = x^3 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$.

a) Je polynom f ireducibilní ? Své tvrzení dokažte.

b) Má $g + (f)$ inverzi v okruhu $(\mathbb{Z}_2[x]/(f), +, \cdot)$? Pokud ano, najděte ji a proveďte zkoušku. Pokud ne, zdůvodněte to.

c) Totéž jako b) pro $h + (f)$.

Algebra I - 2011/12 - zápočtová písemka - skupina B

1. Faktorová grupa.

Nechť $(G, \cdot)$ je grupa všech matic tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3a & 1 & 0 \\ b & 3c & 1 \end{pmatrix},$$

kde $a, b, c \in \mathbb{Z}$, spolu s operací násobení matic. Uvažujme v G podmnožinu

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6a & 1 & 0 \\ 3b & 6a & 1 \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ověřte, že H je normální podgrupou grupy $(G, \cdot)$. Určete, které grupě je izomorfní grupa $(G, \cdot)/H$, a svoje tvrzení dokažte.

Algebra I - 2011/12 - zápočtová písemka - skupina B

2. Inverze ve faktorových okruzích.

Uvažujme polynomy $f = x^5 + x + 1,\ g = x^3 + 1,\ h = x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$.

a) Je polynom f ireducibilní ? Své tvrzení dokažte.

b) Má $g + (f)$ inverzi v okruhu $(\mathbb{Z}_2[x]/(f), +, \cdot)$? Pokud ano, najděte ji a proveďte zkoušku. Pokud ne, zdůvodněte to.

c) Totéž jako b) pro $h + (f)$.