Lineární zobrazení

> $f: U \to V$ je lineární $\Leftrightarrow$
>
> a) $\forall x, y \in U: \; f(x+y) = f(x) + f(y)$
>
> b) $\forall x \in U;\ a \in \mathbb{R}: \; f(ax) = af(x)$

Př. 1) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$f(x) = (1+x_1, x_2), \quad x = (x_1, x_2, x_3)$

Je zobrazení f lineární?

Řešení: Je třeba ověřit vlastnosti a) a b):

a) $f(x+y) = f((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) = f(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) =$

$= (1 + x_1 + y_1, x_2 + y_2)$

$f(x) + f(y) = f(x_1, x_2, x_3) + f(y_1, y_2, y_3) = (1+x_1, x_2) + (1+y_1, y_2)$

$= (2 + x_1 + y_1, x_2 + y_2)$

$\Rightarrow \underline{f(x+y) \neq f(x) + f(y)} \Rightarrow$ není lineární (podmínku b) už není třeba ověřovat)

Př. 2) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$f(x) = (x_1 + x_2, x_1 - x_3), \quad x = (x_1, x_2, x_3)$

Je zobrazení f lineární?

Řešení: Opět je třeba ověřit podmínky a) a b):

a) $f(x+y) = f(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) = (x_1+y_1+x_2+y_2, x_1+y_1-(x_3+y_3))$

$= (x_1+y_1+x_2+y_2, x_1+y_1-x_3-y_3)$

$f(x) + f(y) = f(x_1, x_2, x_3) + f(y_1, y_2, y_3) = (x_1+x_2, x_1-x_3)$

$+ (y_1+y_2, y_1-y_3) = (x_1+x_2+y_1+y_2, x_1-x_3+y_1-y_3)$

$\Rightarrow \underline{f(x+y) = f(x) + f(y)}$

b) $f(a\cdot x) = f(a\cdot x_1, a\cdot x_2, a\cdot x_3) = (ax_1 + ax_2, ax_1 - ax_3)$

$a\cdot f(x) = a\cdot f(x_1, x_2, x_3) = a\cdot(x_1+x_2, x_1-x_3) = (ax_1+ax_2, ax_1-ax_3)$

$\Rightarrow \underline{f(a\cdot x) = a\cdot f(x)}$

$\Rightarrow$ $\underline{f \text{ je lineární}}$

Jádro lineárního zobrazení:

$$\boxed{\begin{array}{l} Ker\, f = \{ x \in U;\ f(x) = 0 \} \\ \qquad\qquad\qquad \hookrightarrow \text{neutrální prvek ve } V \end{array}}$$

Obraz lineárního zobrazení:

$$\boxed{Im\, f = \{ y \in V;\ \exists x \in U:\ f(x) = y \}}$$

Př. 3) Určete jádro a obraz lin. zobrazení $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x_1 + x_2, x_1 - x_3)$

Řešení: Jádro: Jádro tvoří všechny $x = (x_1, x_2, x_3) \in U$ takové, že platí:

$$f(x) = (0,0), \text{ tedy}$$

$$(x_1 + x_2, x_1 - x_3) = (0,0)$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad &= 0 \\ -x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

x_3 zvolíme jako parametr $\Rightarrow x_3 = t$,

$x_2 = -t$, $x_1 = t$

$\Rightarrow$ $Ker\, f = \{ (t, -t, t),\ t \in \mathbb{R} \}$

Obraz: Obraz tvoří všechny $y = (y_1, y_2)$, takové, že existuje $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, že platí

$\cancel{y_1 = x_1 + x_2}$ $y = f(x)$, tedy

$$(y_1, y_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_3),$$

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 \\ y_2 &= x_1 - x_3 \end{aligned}$$

to lze napsat jako

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{Im\, f} = Span\langle (1,1), (1,0), (0,-1) \rangle =$$

$$= Span\langle (1,1), (1,0) \rangle = \underline{\mathbb{R}^2}$$

Matice lin. zobrazení

Nechť $f : U \to V$ je lineární zobrazení a $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$ a $\underline{v} = (v_1, \dots, v_m)$ jsou báze U a V. Potom $\exists$ matice $A_{\underline{v},\underline{u}}$ taková, že pro $\forall w \in U$:

$$[f(w)]_{\underline{v}} = A_{\underline{v},\underline{u}} \, [w]_{\underline{u}}$$

→ tedy ~~obraz libovoln-~~ souřadnice obrazu libovolného vektoru w ~~získáme~~ v bázi $\underline{v}$ získáme vynásobením matice $A_{\underline{v},\underline{u}}$ a souřadnic vektoru w v bázi $\underline{u}$.

Pro $A_{\underline{v},\underline{u}}$ platí: $A_{\underline{v},\underline{u}} = \left([f(u_1)]_{\underline{v}}, \dots, [f(u_n)]_{\underline{v}} \right)$ (*)

Dále platí: $A_{\underline{v}_2,\underline{u}_2} = T_{\underline{v}_2,\underline{v}_1} \cdot A_{\underline{v}_1,\underline{u}_1} \cdot T_{\underline{u}_1,\underline{u}_2}$ (**)

- matice $T_{\underline{v}_2,\underline{v}_1}$ a $T_{\underline{u}_1,\underline{u}_2}$ jsou matice přechodu mezi bázemi

Vztah (**) vyplývá ze schematu:

$$\begin{tikzcd}
U_{\underline{u}_1} \arrow[r, "A_{\underline{v}_1,\underline{u}_1}"] & V_{\underline{v}_1} \arrow[d, "T_{\underline{v}_2,\underline{v}_1}"] \\
U_{\underline{u}_2} \arrow[u, "T_{\underline{u}_1,\underline{u}_2}"] \arrow[r, "A_{\underline{v}_2,\underline{u}_2}"] & V_{\underline{v}_2}
\end{tikzcd}$$

Př. 4) Určete matici lineárního zobrazení $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,
$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3, 2x_1)$ v bazích $\underline{u}, \underline{v}$.

a) $\underline{u} = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$
$\underline{v} = ((1,0), (0,1))$

b) $\underline{u} = ((1,2,0), (-2,1,0), (3,1,-1))$
$\underline{v} = ((2,1), (0,2))$

Řešení: Pomocí vztahu (*)

a) $$A_{\underline{v},\underline{u}} = \left([f(u_1)]_{\underline{v}}, [f(u_2)]_{\underline{v}}, [f(u_3)]_{\underline{v}} \right)$$

$f(u_1) = f(1,0,0) = (1,2)$
$f(u_2) = f(0,1,0) = (2,0)$
$f(u_3) = f(0,0,1) = (-3,0)$

- $\underline{v}$ je „standardní" báze, příslušné souřadnice se tedy „shodují" s vektory

$$\Rightarrow A_{\underline{v},\underline{u}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $$A_{\underline{v},\underline{u}} = \left([f(u_1)]_{\underline{v}}, [f(u_2)]_{\underline{v}}, [f(u_3)]_{\underline{v}} \right)$$

$f(u_1) = f(1,2,0) = (5,2)$
$f(u_2) = f(-2,1,0) = (0,-4)$
$f(u_3) = f(3,1,-1) = (8,6)$

- nyní vypočítáme souřadnice těchto vektorů v bázi $\underline{v}$:

$[(5,2)]_{\underline{v}}$: $a_1(2,1) + a_2(0,2) = (5,2)$

$$2a_1 = 5$$
$$a_1 + 2a_2 = 2$$
$$\Rightarrow [(5,2)]_{\underline{v}} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ -1/4 \end{pmatrix}$$

Analogicky vypočítáme:

$[(0,-4)]_{\underline{v}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$[(8,6)]_{\underline{v}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A_{\underline{v},\underline{u}} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 & 4 \\ -\frac{1}{4} & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Př. 5) V prostoru $\mathbb{R}^3$ máme báze $\underline{u} = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$

a $\underline{v} = ((-1,1,0),(1,1,0),(0,0,1))$

a) Určete matice přechodu od $\underline{u}$ k $\underline{v}$ a od $\underline{v}$ k $\underline{u}$

b) $[x]_{\underline{u}} = (-1,3,0)$

$[y]_{\underline{v}} = (2,4,7)$

Určete $[x]_{\underline{v}}$, $[y]_{\underline{u}}$.

c)
$$A_{\underline{u},\underline{u}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ určete } A_{\underline{v},\underline{v}}$$

Řešení:

a) Postup z předchozí hodiny:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$T_{\underline{v},\underline{u}}$

$$\Rightarrow T_{\underline{v},\underline{u}} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{\underline{u},\underline{v}} = T_{\underline{v},\underline{u}}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $$[x]_{\underline{v}} = T_{\underline{v},\underline{u}} \cdot [x]_{\underline{u}} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

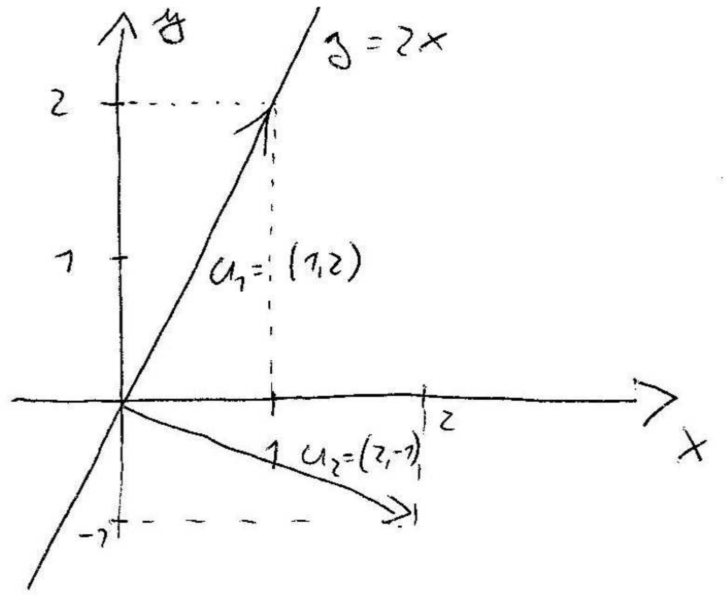
$$[y]_{\underline{u}} = T_{\underline{u},\underline{v}} [y]_{\underline{v}} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

c) ze vztahu $(**)$:

$$A_{\underline{v},\underline{v}} = T_{\underline{v},\underline{u}} \cdot A_{\underline{u},\underline{u}} \cdot T_{\underline{u},\underline{v}} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ -1 & 2 & -1/2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Př. 6) Najděte matici projekce na přímku $y = 2x$ v bazích $\underline{e}, \underline{e}$ (v $\mathbb{R}^2$, $\underline{e} = ((1,0),(0,1))$).



Řešení: 1. způsob:

$$A_{\underline{e},\underline{e}} = \left([f(e_1)]_{\underline{e}}, [f(e_2)]_{\underline{e}} \right) = \left([f(1,0)]_{\underline{e}}, [f(0,1)]_{\underline{e}} \right)$$

$f(1,0)$ a $f(0,1)$ je třeba „geometricky vypočítat", zvolíme proto jiný postup

2. (vhodnější) postup:
Zvolíme si vhodnější bázi, tak, aby se výpočet obrazů co nejvíce zjednodušil.

$$\underline{u} = ((1,2),(2,-1))$$

$$A_{\underline{e},\underline{u}} = \left([f(u_1)]_{\underline{e}}, [f(u_2)]_{\underline{e}} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(u_1) = f(1,2) = (1,2)$$
$$f(u_2) = f(2,-1) = (0,0)$$

Nakonec z $A_{\underline{e},\underline{u}}$ vypočítáme $A_{\underline{e},\underline{e}}$ (pomocí (**))

$$A_{\underline{e},\underline{e}} = A_{\underline{e},\underline{u}} \cdot T_{\underline{u},\underline{e}}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/5 & 2/5 \\ 0 & 1 & 2/5 & -1/5 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{matrix}}_{T_{\underline{u},\underline{e}}}$$

$$\Rightarrow \underline{A_{\underline{e},\underline{e}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$