Vektorové prostory

1. Ověřte, že následující množiny s uvedenými operacemi tvoří vektorový prostor:

a) Matice o rozměru 2×3 s klasicky definovaným sčítáním matic a násobením matic reálným číslem.

b) $V = \{(1, x);\, x \in \mathbb{R}\}$, $(1, x) \oplus (1, y) = (1, x + y)$, $k \odot (1, x) = (1, kx)$.

c) Polynomy nejvýše druhého stupně s reálnými koeficienty a klasicky definovaným sčítáním polynomů a násobením polynomů reálným číslem.

2. Je podprostorem vektorového prostoru $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$

a) přímka $y = x$?

[ano]

b) přímka $y = x + 1$?

[ne]

3. Napište nějakou bázi vektorových prostorů $V_1 = \mathbb{R}^3$, $V_2 = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $V_3 = \mathcal{P}_2$ (polynomy stupně nejvýše 2).

4. Tvoří vektory $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 0)$ a $(1, 3, 1)$ bázi $\mathbb{R}^3$?

[ano]

5. V prostoru polynomů stupně nejvýše 3 určete souřadnice vektoru $v = x^3+3x^2-5x+2$ v bázi $\underline{u} = (x^3 + x^2 + x + 1,\ x^2 + x + 1,\ x + 1, 1)$.

$[[v]_{\underline{u}} = (1, 2, -8, 7)']$

6. Najděte matici přechodu od báze $\underline{e} = (1, x, x^2)$ k bázi $\underline{u} = (1, x + 1, 1 - x^2)$.

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right]$$

7. Najděte matici přechodu od báze $\underline{u} = ((1, 2, 1), (2, 5, 2), (1, 3, 2))$ k bázi $\underline{v} = ((4, -1, -1), (-2, 1, 0), (1, -1, 1))$.

$$\left[\begin{pmatrix} 6 & 14 & 9 \\ 15 & 35 & 23 \\ 7 & 16 & 11 \end{pmatrix}\right]$$