Lineární zobrazení

1. Určete, zda je zobrazení $f : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_2$ lineární:

a) $f(ax^2 + bx + c) = bx + c$

[ano]

b) $f(ax^2 + bx + c) = abx + c$

[ne]

2. Ověřte, že je zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + 3x_2 + 2x_3, 5x_1 + x_2 + 6x_3, 2x_2 + x_3)$ lineární, a určete jeho jádro, obraz a matici ve standardní bázi.

$$\left[\mathrm{Ker}(f) = \{(0,0,0)\},\ \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3, A_{\underline{e},\underline{e}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

3. Matice zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ v bázi $\underline{u} = ((1,0,1), (0,1,1), (1,1,0))$ je tvaru

$$A_{\underline{u},\underline{u}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Určete tvar matice zobrazení ve standardní bázi.

$$\left[\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

4. Matice zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ve standardní bázi je tvaru

$$A_{\underline{e},\underline{e}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Určete tvar matice zobrazení v bázi $\underline{v} = ((1,1,0), (-1,1,1), (2,0,1))$

$$\left[\begin{pmatrix} -1/4 & 2 & -3/4 \\ 5/4 & 0 & 7/4 \\ 3/4 & -2 & 9/4 \end{pmatrix}\right]$$

5. V $\mathbb{R}^2$ najděte matici projekce na přímku $y = ax, a > 0$ ve standardní bázi.

$$\left[\frac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix}\right]$$