Příklad 1. Najděte řádkový prostor, sloupcový prostor (ImA) a jádro matice A.

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- rozhodněte v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

Příklad 2. Jsou na sebe kolmé (ortogonální) následující dvojice vektrových podprostorů? (Vždy uvažte příslušný skalární součin ze skript.)

- $U = \mathrm{Span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $V = \mathrm{Span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$
- $U = \mathrm{Span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $V = \mathrm{Span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$
- $U = \mathrm{Span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $V = \mathrm{Span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

Příklad 3. Najděte velikost následujících vektorů.

- $(1\ 1\ 2\ 0\ 1)$
- $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Příklad 4. Je následující množina vektorů ortogonální? Je ortonormální?

- $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
- $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$
- $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{22}}{22} \\ 2\frac{\sqrt{22}}{22} \\ 4\frac{\sqrt{22}}{22} \\ \frac{\sqrt{22}}{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{55}}{11} \\ -\frac{\sqrt{55}}{55} \\ -2\frac{\sqrt{55}}{55} \\ \frac{\sqrt{55}}{11} \end{pmatrix} \right\}$
- $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{22}}{22} \\ 2\frac{\sqrt{22}}{22} \\ 4\frac{\sqrt{22}}{22} \\ \frac{\sqrt{22}}{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{4}}{4} \\ \frac{\sqrt{4}}{4} \\ \frac{\sqrt{4}}{4} \\ \frac{\sqrt{4}}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{58}}{29} \\ \frac{-3\sqrt{58}}{29} \\ \frac{\sqrt{58}}{29} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Příklad 5. Je následující matice ortogonální?

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{22}}{22} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{55}}{11} \\ 2\frac{\sqrt{22}}{22} & 0 & -2\frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{55}}{55} \\ 4\frac{\sqrt{22}}{22} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} & -2\frac{\sqrt{55}}{55} \\ \frac{\sqrt{22}}{22} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{55}}{11} \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{22}}{22} & \frac{\sqrt{4}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2\sqrt{58}}{29} \\ 2\frac{\sqrt{22}}{22} & \frac{\sqrt{4}}{4} & 0 & \frac{-3\sqrt{58}}{29} \\ 4\frac{\sqrt{22}}{22} & \frac{\sqrt{4}}{4} & 0 & \frac{\sqrt{58}}{29} \\ \frac{\sqrt{22}}{22} & \frac{\sqrt{4}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$

Příklad 6. Najděte ortogonální doplněk podprostoru U prostoru V.

- $U = \mathrm{Span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $V = \mathbb{E}^4$
- $U = \mathrm{Span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $V = \mathrm{Span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$
- $U = \left\{ \begin{pmatrix} r-s \\ s+t \\ r-s-t \\ r+s+t \\ t \end{pmatrix} \mid r, s, t \in \mathbb{R} \right\}$, $V = \mathbb{E}^5$

Příklad 7. Najděte kolmou projekci vektoru $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ do podprostoru $W = \mathrm{Span}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$. Jaká je vzdálenost a jaká je odchylka vektoru u od podprostoru W?

Příklad 8. Najděte matici kolmé projekce z $\mathbb{R}^4$ na parametricky zadanou přímku p: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. (Jedná se o lineární zobrazení? Jak jsou definovány jednotlivé sloupce matice zobrazení, jestliže hledáme matici zobrazení f z $\mathbb{R}^4$ do $\mathbb{R}^4$ ve standardních bazích.)

Příklad 9. Gram-Schmidtovým ortogonalizačním procesem převeďte bázi α na ortogonální bázi β. Poté bázi β převeďte na bázi γ, která bude ortonormální.

- $\alpha = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$
- $\alpha = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
- $\alpha = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

Příklad 10. Najděte ortogonální a ortonormální bázi podprostoru z příkladu 7 a pomocí nich postupně (tj. počítejte 2x) najděte kolmou projekci vektoru z příkladu 7.

Příklad 11. Metodou nejmenších čtverců řeste systém lineárních rovnic. (Všiměte si, že v prvním příkladu obdržíte řešení daného systému, zatímco v druhém příkladu najdete nějakou aproximaci, neboť ten řešení nemá.)

- $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 &= 4 \\ 2x_1 + 6x_2 &= 8 \\ 2x_1 + x_2 &= 3 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 &= -4 \\ 2x_1 + 6x_2 &= 8 \\ 2x_1 + x_2 &= 3 \end{aligned}$$