Zkouška MB101, čtvrtek 4.2.2010, 8:00–10:00 hodin

1. (4 body) **Kombinatorika.** Čtěte pozorně (rozlišitelné/nerozlišitelné)! Uvažte, že lze umístit více koulí do jedné přihrádky. Kolika způsoby lze rozdělit (a) 3 rozlišitelné koule do 2 rozlišitelných přihrádek? (b) 3 nerozlišitelné koule do 2 rozlišitelných přihrádek? (c) 3 rozlišitelné koule do 2 nerozlišitelných přihrádek? (d) 3 nerozlišitelné koule do 2 nerozlišitelných přihrádek?

2. (4 body) **Pravděpodobnost.**
- (a) Napište definici podmíněné pravděpodobnosti jevu A za podmínky, že nastal jev B.
- (b) Házíme třikrát kostkou. Určete pravděpodobnost, že na první kostce padne liché číslo za podmínky, že celkem padne součet 15 nebo 16. [Nápověda: Určete nejprve všechny možnosti, jak dostat součet 15 nebo 16 ze tří kostek.]

3. (3 body) **Relace.**
- (a) Definujte pojmy kartézský součin množin A a B, relace mezi množinami A a B, relace na množině A.
- (b) Definujte reflexivní relaci, symetrickou relaci, tranzitivní relaci, relaci uspořádání na A.
- (c) Uveďte příklad relace na množině $\{1, 2, 3, 4\}$, která (i) není reflexivní, (ii) je reflexivní a současně není symetrická, (iii) je symetrická a současně není tranzitivní. Příklady uveďte buď výčtem prvků relace nebo tabulkou nebo obrázkem (grafem) relace s orientovanými šipkami.

4. (4 body) **Lineární rovnice.**

Metodou Gaussovy eliminace vyřešte následující lineární systém a proveďte diskusi řešení vzhledem hodnotám parametru $a \in \mathbb{R}$ (tj. pro které hodnoty parametru a řešení neexistuje nebo existuje a tato řešení určete:

$$\begin{aligned}
-4x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 &= a \\
+ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 2, \\
4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 7x_4 &= 2, \\
8x_1 + 9x_2 + 10x_3 + 11x_4 &= 2.
\end{aligned}$$

5. (4 body) **Determinant.** Uvažujme matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete determinant matice A. Rozhodněte, jestli je matice A regulární. Pokud ano, určete determinant inverzní matice k matici A.

6. (4 body) **Vlastní hodnoty.**
- (a) Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory matice A z minulého příkladu a příslušné algebraické a geometrické násobnosti vlastních hodnot. Určete vlastní hodnoty matice A^{-1}. Rozhodněte a zdůvodněte, jestli jsou matice A a A^{-1} pozitivně (semi)definitní, negativně semi(definitní). Určete matice P a D v diagonalizovaném tvaru matice $A = PDP^{-1}$ (matici P^{-1} nepočítejte).
- (b) Porovnejte stopu matice A se součtem jejích vlastních hodnot a determinant matice A se součinem jejích vlastních hodnot. Určete stopu matice A^{-1}.

7. (4 body) **Vektorové prostory.** Uvažujme vektorový prostor $\mathrm{Mat}_{2\times2}$ čtvercových matic řádu 2
- (a) Určete nějakou bázi tohoto vektorového prostoru a jeho dimenzi. Ověřte, že Vámi vybraná množina prvků báze je skutečně lineárně nezávislá. Určete souřadnice matice $M = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ ve Vámi zvolené bázi.
- (b) Buď $W \subseteq \mathrm{Mat}_{2\times2}$ podmnožina takových matic, které mají součet prvků na hlavní diagonále roven nule a současně mají součet prvků na vedlejší diagonále roven nule. Rozhodněte, jestli je množina W vektorový podprostor v prostoru $\mathrm{Mat}_{2\times2}$ a pokud ano, určete bázi a dimenzi W.

8. (3 body) **Iterované procesy.** Pražská oblast má 1200 tisíc obyvatel, což zahrnuje vlastní město (centrum) a severní a jižní předměstí. Každý rok se z centra přestěhuje 5% obyvatel na sever a 8% obyvatel na jih, ze severu se přestěhuje 10% obyvatel do centra a 2% obyvatel na jih a z jihu se přestěhuje 10% obyvatel do centra a 5% obyvatel na sever. Zapište tento model v maticovém tvaru. Rozhodněte, jestli je matice procesu stochastická a (bez výpočtu) určete jednu její vlastní hodnotu.

Zkouška MB101, čtvrtek 4.2.2010, 8:00–10:00 hodin

1. (4 body) **Kombinatorika.** Čtěte pozorně (rozlišitelné/nerozlišitelné)! Uvažte, že lze umístit více koulí do jedné přihrádky. Kolika způsoby lze rozdělit (a) 3 rozlišitelné koule do 2 rozlišitelných přihrádek? (b) 3 nerozlišitelné koule do 2 rozlišitelných přihrádek? (c) 3 rozlišitelné koule do 2 nerozlišitelných přihrádek? (d) 3 nerozlišitelné koule do 2 nerozlišitelných přihrádek?

2. (4 body) **Pravděpodobnost.**
(a) Napište definici podmíněné pravděpodobnosti jevu A za podmínky, že nastal jev B.
(b) Házíme třikrát kostkou. Určete pravděpodobnost, že na první kostce padne liché číslo za podmínky, že celkem padne součet 5 nebo 6. [Nápověda: Určete nejprve všechny možnosti, jak dostat součet 5 nebo 6 ze tří kostek.]

3. (3 body) **Relace.**
(a) Definujte pojmy kartézský součin množin A a B, relace mezi množinami A a B, relace na množině A.
(b) Definujte reflexivní relaci, antisymetrickou relaci, tranzitivní relaci, relaci ekvivalence na A.
(c) Uveďte příklad relace na množině $\{a, b, c, d\}$, která (i) není reflexivní, (ii) je reflexivní a současně není symetrická, (iii) je symetrická a současně není tranzitivní. Příklady uveďte buď výčtem prvků relace nebo tabulkou nebo obrázkem (grafem) relace s orientovanými šipkami.

4. (4 body) **Lineární rovnice.**
Metodou Gaussovy eliminace vyřešte následující lineární systém a proveďte diskusi řešení vzhledem hodnotám parametru $a \in \mathbb{R}$ (tj. pro které hodnoty parametru a řešení neexistuje nebo existuje a tato řešení určete:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -4x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & a \\ & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & -6, \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & + & 7x_4 & = & -2, \\ 8x_1 & + & 9x_2 & + & 10x_3 & + & 11x_4 & = & 2. \end{array}$$

5. (4 body) **Determinant.** Uvažujme matici

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete determinant matice B. Rozhodněte, jestli je matice B regulární. Pokud ano, určete determinant inverzní matice k matici B.

6. (4 body) **Vlastní hodnoty.**
(a) Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory matice B z minulého příkladu a příslušné algebraické a geometrické násobnosti vlastních hodnot. Určete vlastní hodnoty matice B^{-1}. Rozhodněte a zdůvodněte, jestli jsou matice B a B^{-1} pozitivně (semi)definitní, negativně semi(definitní). Určete matice P a D v diagonalizovaném tvaru matice $B = PDP^{-1}$ (matici P^{-1} nepočítejte).
(b) Porovnejte stopu matice B se součtem jejích vlastních hodnot a determinant matice B se součinem jejích vlastních hodnot. Určete stopu matice B^{-1}.

7. (4 body) **Vektorové prostory.** Uvažujme vektorový prostor $\mathrm{Mat}_{2\times 2}$ čtvercových matic řádu 2
(a) Určete nějakou bázi tohoto vektorového prostoru a jeho dimenzi. Ověřte, že Vámi vybraná množina prvků báze je skutečně lineárně nezávislá. Určete souřadnice matice $M = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ ve Vámi zvolené bázi.
(b) Buď $W \subseteq \mathrm{Mat}_{2\times 2}$ podmnožina takových matic, které mají součet prvků na hlavní diagonále roven nule a současně mají součet prvků na vedlejší diagonále roven nule. Rozhodněte, jestli je množina W vektorový podprostor v prostoru $\mathrm{Mat}_{2\times 2}$ a pokud ano, určete bázi a dimenzi W.

8. (3 body) **Iterované procesy.** Pražská oblast má 1200 tisíc obyvatel, což zahrnuje vlastní město (centrum) a severní a jižní předměstí. Každý rok se z centra přestěhuje 5% obyvatel na sever a 8% obyvatel na jih, ze severu se přestěhuje 10% obyvatel do centra a 2% obyvatel na jih a z jihu se přestěhuje 10% obyvatel do centra a 5% obyvatel na sever. Zapište tento model v maticovém tvaru. Rozhodněte, jestli je matice procesu stochastická a (bez výpočtu) určete jednu její vlastní hodnotu.