FI: JARO 2011 $\boxed{1}$ **Skupina A**

Zkouška MB101, čtvrtek 2.6.2011, 8:00–10:00 hodin

1. (3 body) **Kombinatorika.** Při karetní hře "Prší" se rozdává 5 karet z balíčku 32 karet (4 barvy, každá barva má 8 karet s hodnotami 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A). Kolik je možností, ve kterých dostaneme do ruky (a) pět karet s různou hodnotou (na barvě nezáleží)? (b) pět karet stejné barvy? (c) dvě esa, dva krále a jednu dámu?

2. (4 body) **Náhodné jevy a pravděpodobnost.** Házíme dvěma kostkami současně. Označme

A = na všech kostkách padne sudé číslo,
B = padne součet nejvýše 6.

Určete pravděpodobnosti náhodných jevů A a B, jejich společného nastoupení $(A \cap B)$ a jejich sjednocení $(A \cup B)$.

3. (3 body) **Relace.** Na množině $X = \{2, 4, 8, 10, 16, 20, 24, 40\}$ mějme relaci R zadánu takto: číslo m je v relaci s číslem n pokud je zlomek $\frac{m}{n}$ přirozené číslo. Pomocí orientovaných šipek (podle pravidla $m \to n$, pokud je m v relaci s n) dokreslete níže graf této relace. Dále rozhodněte, jestli je tato relace reflexivní, symetrická, tranzitivní, antisymetrická, ekvivalence, uspořádání.

4. (4 body) **Lineární rovnice.** Následující lineární systém

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad + x_3 &= 2, \\ x_1 \qquad\quad + x_3 &= -1, \\ x_1 + x_2 \qquad\quad &= 3, \\ x_1 + x_2 \qquad\quad &= 7, \end{aligned}$$

zřejmě nemá řešení (např. srovnáním prvních dvou rovnic). Určete řešení tohoto systému metodou nejmenších čtverců. Dále určete nejmenší možnou vzdálenost mezi levou a pravou stranou tohoto lineárního systému.

5. (4 body) **Determinant.** Uvažujme vektory

$$u_1 = (1, 1, 1, 1), \quad u_2 = (1, 0, a, 0), \quad u_3 = (-1, 8, 1, 0), \quad u_4 = (-2, a, 8, -5).$$

Pomocí determinantu určete všechny hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$ tak, aby byly vektory u_1, u_2, u_3, u_4 lineárně závislé. Pokud bude potřeba, použijte $\sqrt{1296} = 36$.

6. (4 body) **Vlastní hodnoty.** Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 12 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix},$$

včetně báze a dimenze příslušných vlastních podprostorů. Dále určete vlastní hodnoty, determinant a stopu matice A^{-1}.

7. (4 body) **Vektorové prostory.** Ve vektorovém prostoru matic $\mathrm{Mat}_{2\times 2}$ mějme podprostor W generovaný maticemi

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pomocí Grammova–Schmidtova procesu určete ortogonální bázi $\underline{V} = (V_1, V_2, V_3)$ podprostoru W. Poté určete souřadnice matice $X = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 3 \\ 8 & -5 \end{smallmatrix}\right) \in W$ vzhledem k této vypočtené ortogonální bázi $\underline{V}$.

8. (4 body) **Iterované procesy.** Předpokládejme, že v populačním modelu dravec–kořist (sova–myš) je vztah mezi počtem sov (S_k) a počtem myší (M_k) v daném a následujícím období následovný:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= 0.4\, S_k + 0.1\, M_k, \\ M_{k+1} &= -0.6\, S_k + 1.1\, M_k. \end{aligned}$$

Pomocí tohoto modelu analyzujte stav této populace z dlouhodobého hlediska za podmínky, že počáteční počet sov a myší je $S_0 = 10$ a $M_0 = 110$.

FI: JARO 2011 $\boxed{1}$ **Skupina B**

Zkouška MB101, čtvrtek 2.6.2011, 8:00–10:00 hodin

1. (3 body) **Kombinatorika.** Při karetní hře "Prší" se rozdává 5 karet z balíčku 32 karet (4 barvy, každá barva má 8 karet s hodnotami 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A). Kolik je možností, ve kterých dostaneme do ruky (a) pět karet s různou hodnotou (na barvě nezáleží)? (b) pět karet stejné barvy? (c) dvě dámy, dva krále a jedno eso?

2. (4 body) **Náhodné jevy a pravděpodobnost.** Házíme dvěma kostkami současně. Označme

C = na všech kostkách padne liché číslo,
D = padne součet alespoň 8.

Určete pravděpodobnosti náhodných jevů C a D, jejich společného nastoupení $(C \cap D)$ a jejich sjednocení $(C \cup D)$.

3. (3 body) **Relace.** Na množině $Y = \{2, 4, 6, 8, 12, 18, 24, 40\}$ mějme relaci R zadánu takto: číslo m je v relaci s číslem n pokud je zlomek $\frac{m}{n}$ přirozené číslo. Pomocí orientovaných šipek (podle pravidla $m \to n$, pokud je m v relaci s n) dokreslete níže graf této relace. Dále rozhodněte, jestli je tato relace reflexivní, symetrická, tranzitivní, antisymetrická, ekvivalence, uspořádání.

4. (4 body) **Lineární rovnice.** Následující lineární systém

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & x_3 & = & 5, \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 1, \\ x_1 & + & x_2 & & & = & -2, \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 1, \end{array}$$

zřejmě nemá řešení (např. srovnáním prvních dvou rovnic). Určete řešení tohoto systému metodou nejmenších čtverců. Dále určete nejmenší možnou vzdálenost mezi levou a pravou stranou tohoto lineárního systému.

5. (4 body) **Determinant.** Uvažujme vektory

$$u_1 = (\,1,\, 1,\, 1,\, 1\,), \quad u_2 = (\,1,\, 0,\, 3,\, 0\,), \quad u_3 = (\,2,\, b,\, 0,\, 1\,), \quad u_4 = (\,3,\, -2,\, b,\, 6\,).$$

Pomocí determinantu určete všechny hodnoty parametru $b \in \mathbb{R}$ tak, aby byly vektory u_1, u_2, u_3, u_4 lineárně závislé. Pokud bude potřeba, použijte $\sqrt{144} = 12$.

6. (4 body) **Vlastní hodnoty.** Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory matice

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 16 & 8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & 3 \end{pmatrix},$$

včetně báze a dimenze příslušných vlastních podprostorů. Dále určete vlastní hodnoty, determinant a stopu matice B^{-1}.

7. (4 body) **Vektorové prostory.** Ve vektorovém prostoru matic $\mathrm{Mat}_{2\times 2}$ mějme podprostor W generovaný maticemi

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pomocí Grammova–Schmidtova procesu určete ortogonální bázi $\underline{V} = (V_1, V_2, V_3)$ podprostoru W. Poté určete souřadnice matice $Y = \left(\begin{smallmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{smallmatrix}\right) \in W$ vzhledem k této vypočtené ortogonální bázi $\underline{V}$.

8. (4 body) **Iterované procesy.** Předpokládejme, že v populačním modelu dravec–kořist (sova–myš) je vztah mezi počtem sov (S_k) a počtem myší (M_k) v daném a následujícím období následovný:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= 0.4\, S_k + 0.1\, M_k, \\ M_{k+1} &= -0.6\, S_k + 1.1\, M_k. \end{aligned}$$

Pomocí tohoto modelu analyzujte stav této populace z dlouhodobého hlediska za podmínky, že počáteční počet sov a myší je $S_0 = 40$ a $M_0 = 190$.