FI: JARO 2011 $\boxed{2}$ **Skupina A**

Zkouška MB101, středa 15.6.2011, 9:00–11:00 hodin

1. (4 body) **Kombinatorika.** Házíme 4x kostkou (šest stran, hodnoty 1,2,…,6). Kolik je možností, že padnou (a) různá čísla, (b) právě dvě stejná a dvě jiná čísla, (c) postupně čísla 1,2,2,3?

2. (3 body) **Náhodné jevy a pravděpodobnost.**

(a) Napište definici geometrické pravděpodobnosti.

(b) Každý ze dvou parníků může doplout do přístavu vždy jednou za den, a to se stejnou pravděpodobností v kterýkoli jeho okamžik. V přístavu může být v jeden okamžik pouze jeden parník. První parník se v přístavišti zdrží 2 hodiny a druhý parník 3 hodiny. Jaká je pravděpodobnost, že jeden parník bude muset čekat, až druhý opustí přístaviště?

3. (4 body) **Elementární geometrie.**

(a) Které hrany pětiúhelníku s vrcholy $A = [2, 2]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-3, -1]$, $D = [1, -2]$, $E = [3, 0]$ jsou viditelné z bodu $X = [5, 5]$?

(b) Určete matici lineárního zobrazení v $\mathbb{R}^2$, které popisuje otočení o úhel $\frac{\pi}{3}$ v kladném směru.

(c) Určete matici lineárního zobrazení v $\mathbb{R}^2$, kterým je složené zobrazení projekce na osu x a poté otočení o úhel $\frac{\pi}{3}$ v kladném směru.

4. (4 body) **Lineární rovnice.**

(a) Zformulujte Frobeniovu větu o řešitelnosti systému lineárních rovnic pomocí hodnosti matice.

(b) V závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$ vyřešte následující lineární systém

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ 2x_1 & + & \boldsymbol{a}x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ & & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 1, \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 1. \end{array}$$

5. (3 body) **Determinant.**

(a) Vypočtěte determinant matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Bez počítání určete determinant matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. (4 body) **Vlastní hodnoty.**

(a) Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Je matice A diagonalizovatelná?

7. (4 body) **Vektorové prostory.**

(a) Rozhodněte, zda množina $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; xy \geq 0\}$ tvoří vektorový podprostor prostoru $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

(b) Uvažujme vektorový prostor matic $\mathrm{Mat}_{2\times2}$. Určete bázi a dimenzi vektorového podprostoru W generovaného maticemi

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_5 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Určete bázi ortogonálního doplňku podprostoru W, tj. podprostoru $W^{\perp}$.

8. (4 body) **Iterované procesy.** V ČR je cca 700 tisíc fotbalistů, což zahrnuje profesionální i amatérské fotbalisty. Analyzujte změny v počtech amatérských a profesionálních hráčů (a jejich dlouhodobý efekt), jestliže každý rok získá 15% amatérských fotbalistů status profesionála a 10% profesionálních hráčů se stane zpět amatéry.

FI: JARO 2011 $\boxed{2}$ **Skupina B**

Zkouška MB101, středa 15.6.2011, 9:00–11:00 hodin

1. (4 body) **Kombinatorika.** Házíme 4x kostkou (šest stran, hodnoty 1,2,. . . ,6). Kolik je možností, že padnou (a) různá čísla, (b) právě dvě stejná a dvě jiná čísla, (c) postupně čísla 2,3,3,5?

2. (3 body) **Náhodné jevy a pravděpodobnost.**

(a) Napište definici geometrické pravděpodobnosti.

(b) Každý ze dvou parníků může doplout do přístavu vždy jednou za den, a to se stejnou pravděpodobností v kterýkoli jeho okamžik. V přístavu může být v jeden okamžik pouze jeden parník. První parník se v přístavišti zdrží 4 hodiny a druhý parník 1 hodiny. Jaká je pravděpodobnost, že jeden parník bude muset čekat, až druhý opustí přístaviště?

3. (4 body) **Elementární geometrie.**

(a) Které hrany pětiúhelníku s vrcholy $A = [2, 2]$, $B = [-1, 1]$, $C = [-3, -1]$, $D = [1, -2]$, $E = [3, 0]$ jsou viditelné z bodu $Y = [-3, -3]$?

(b) Určete matici lineárního zobrazení v $\mathbb{R}^2$, které popisuje otočení o úhel $\frac{\pi}{6}$ v kladném směru.

(c) Určete matici lineárního zobrazení v $\mathbb{R}^2$, kterým je složené zobrazení projekce na osu y a poté otočení o úhel $\frac{\pi}{6}$ v kladném směru.

4. (4 body) **Lineární rovnice.**

(a) Zformulujte Frobeniovu větu o řešitelnosti systému lineárních rovnic pomocí hodnosti matice.

(b) V závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$ vyřešte následující lineární systém

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 2, \\ 2x_1 & + & \boldsymbol{a}x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 2, \\ & & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 2, \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 2. \end{array}$$

5. (3 body) **Determinant.**

(a) Vypočtěte determinant matice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Bez počítání určete determinant matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. (4 body) **Vlastní hodnoty.**

(a) Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory matice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Je matice A diagonalizovatelná?

7. (4 body) **Vektorové prostory.**

(a) Rozhodněte, zda množina $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ xy \geq 0\}$ tvoří vektorový podprostor prostoru $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

(b) Uvažujme vektorový prostor matic $\mathrm{Mat}_{2\times 2}$. Určete bázi a dimenzi vektorového podprostoru W generovaného maticemi

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_5 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Určete bázi ortogonálního doplňku podprostoru W, tj. podprostoru $W^{\perp}$.

8. (4 body) **Iterované procesy.** V ČR je cca 700 tisíc fotbalistů, což zahrnuje profesionální i amatérské fotbalisty. Analyzujte změny v počtech amatérských a profesionálních hráčů (a jejich dlouhodobý efekt), jestliže každý rok získá 20% amatérských fotbalistů status profesionála a 15% profesionálních hráčů se stane zpět amatéry.