Řešení třetí písemky

Skupina A, B

Příklad č. 1:

a) Část už byla v zadání: $f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$. Dále lehce umíme spočítat $f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$. A nakonec podle toho, co jsme právě spočítali je $f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix}$.

Skupina **B** se liší pouze v a), postup je obdobný a výsledek je stejný.

b) Protože hledáme matici $f_{\varepsilon_4\varepsilon_3}$, znamená to vzít první (druhý a třetí) vektor ze standardní báze, zobrazit ho zobrazením f a podívat se jaké má souřadnice ve standardní bázi: $\left[f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)\right]_{\varepsilon_4}=\left[\begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix}\right]_{\varepsilon_4}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix}$, což přesně odpovídá obrazu vektoru $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ v zobrazení *f*. Tedy dostáváme $f_{\varepsilon_4\varepsilon_3}=\begin{pmatrix}0&0&1\\2&1&-1\\0&0&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$. Jiná možnost jak získat tuto matici je $f_{\varepsilon_4\varepsilon_3}=f_{\varepsilon_4\gamma}\cdot(\mathrm{id})_{\gamma\varepsilon_3}$, kde je báze $\gamma=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$. Tedy

$$f_{\varepsilon_4\varepsilon_3}=f_{\varepsilon_4\gamma}\cdot(\mathrm{id})_{\gamma\varepsilon_3}=f_{\varepsilon_4\gamma}\cdot(\mathrm{id})^{-1}_{\varepsilon_3\gamma}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&0&1\\1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\2&1&-1\\0&0&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

c) Najít předpis znamená najít obraz libovolného vektoru $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Opět lze využít linearitu zobrazení *f*:

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = f\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = x\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 2x+y-z \\ z \\ x+y-z \end{pmatrix}.$$

d)

$$f_{\alpha\varepsilon_3} = (\mathrm{id})_{\alpha\varepsilon_4} \cdot f_{\varepsilon_4\varepsilon_3} = (\mathrm{id})^{-1}_{\varepsilon_4\alpha} \cdot f_{\varepsilon_4\varepsilon_3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e) $\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \middle| f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} c \\ 2a+b-c \\ c \\ a+b-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Tedy řeším homogenní systém 4 lineárních rovnic o třech neznámých $c = 0,\ 2a+b-c = 0,\ c = 0,\ a+b-c = 0$ pomocí řádkových úprav matice sytému: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Z matice odečtu řešení $a = b = c = 0.$ Tedy jádro je $\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

$$\operatorname{Im} f=\left\{\begin{pmatrix}p\\q\\r\\s\end{pmatrix}\middle|\ \exists\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^3: f\left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}p\\q\\r\\s\end{pmatrix}\right\}=\left\{f\left(\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right)\middle|\ a,b,c\in\mathbf{R}\right\}=$$

$$\left\{f\left(a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\middle|\ a,b,c\in\mathbf{R}\right\}=\left\{a\begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\middle|\ a,b,c\in\mathbf{R}\right\}=$$

$$\operatorname{Span}\left\langle\begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle$$

A protože už z výpočtu jádra víme, že všechny tři tyto vektory jsou lineárně nezávislé, tvoří bázi obrazu zobrazení *f*. (Kdyby nebyly lineárně nezávislé, tak bychom z nich nějakou bázi vybrali.)

Příklad č. 2:

Hledáme souřadnice vektoru v bázi, tedy hledáme koeficienty takové, že, když nimi vynásobíme prvky báze a tyto násobky sečteme, dostaneme zadaný vektor. Hledáme *a*, *b* a *c* tak, aby $1-3x+x^2=a\cdot(1+x^2)+b\cdot(2+x)+c\cdot(x+x^2)$. Po úpravách dostáváme rovnost dvou vektorů $1-3x+x^2=(a+2b)+(b+c)x+(a+c)x^2$. Dva polynomy jsou stejné, jestliže mají stejné koeficienty u stejných mocnin *x*. Tedy dostáváme systém tří lineárních rovnic o třech neznámých (musí mít právě jedno řešení, jinak by β nebyla báze): $1=a+2b,\quad -3=b+c,\quad 1=a+c$. Řešíme například maticově: $\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&1\\0&1&1&-3\\1&0&1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&1\\0&1&1&-3\\0&2&-1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&1\\0&1&1&-3\\0&0&-3&6\end{array}\right)$. Odečteme řešení $a=3, b=-1, c=-2$. Tedy hledané souřadnice jsou $\left[1-3x+x^2\right]_\beta=\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}$.

Skupina **B** se počítá úplně stejně (jen se mění pravá strana v matici systému) a vyjde $\left[1+3x+x^2\right]_\beta=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$.

Příklad č. 3:

Jedná se o ověření podmínky neprázdnosti *M*, ověření uzavřenosti na součet vektorů (tedy, že součet libovolných dvou vektorů z *M* je opět vektor z *M*) a uzavřenosti na skalární násobky (tedy, že libovolný skalární násobek vektoru z M je také prvkem M). (Přičemž poslední dvě podmínky jsou ekvivalentní s podmínkou $\forall x, y \in M\ \forall a, b \in \mathrm{R} : (ax + by) \in M$.)

1) M je neprázdná, neboť obsahuje například matici $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. (Skupina **B** stejně.)

2) Druhá podmínka neplatí. Uvážím například matice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, které patří do M, protože splňují podmínku, aby do ní patřily. Ale jejich součet je matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, která do M nepatří, protože $1 \cdot 1 \neq 0 \cdot 0$. (Skupina **B** uváží např. matice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.)

3) Třetí podmínka platí, tak to dokažme. Nechť je matice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M$, tj. platí ab=cd. Nechť dále je $k \in \mathrm{R}$ libovolné. Pak matice $k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix} \in M$, protože je $ka \cdot kb = k^2 ab = k^2 cd = kc \cdot kd$. (Skupina **B**: Nechť je matice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M$, tj. platí cb=bd. Nechť dále je $k \in \mathrm{R}$ libovolné. Pak matice $k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix} \in M$, protože je $ka \cdot kc = k^2 ac = k^2 bd = kb \cdot kd$.)

Příklad č. 4:

Dosadím vektory do determinantu a spočítám jej. Pokud bude determinant roven 0, pak jsou vektory lineárně závislé. Pokud bude různý od 0, budou lineárně nezávislé a budou tvořit bázi.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^{+} & 0^{-} & \underline{\underline{1}}^{+} & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1^{+} & 1^{-} & \underline{\underline{1}}^{+} \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 6 = -3 \neq 0$$

V prvním kroku jsme udělali řádkové úpravy podle prvního řádku, abychom pod ním vynulovali třetí sloupec (kde bylo hodně nul). V druhém kroku jsme podle toho sloupce, který jsme nulovali, udělali La Placeův rozvoj. Poté jsme tento dvoukrokový postup zopakovali a nakonec Saarusovým pravidlem spočítali determinant 2x2. (Skupina **B** má pouze matici transponovanou, tedy výsledek je úplně stejný.)