Řešení čtvrté písemky

Skupina A, B

Příklad č. 1:

Skupina **B** má pouze přejmenované parametry.

Nejprve najdu bázi W:

$$W = \left\{ \left. \begin{pmatrix} r+s+t \\ -r+t \\ r+s \\ -t \\ s+t \end{pmatrix} \right| r,s,t \in \mathbf{R} \right\} = \left\{ \left. r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| r,s,t \in \mathbf{R} \right\} = \mathrm{Span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Hledám všechny vektory kolmé na tyto tři z báze. Mějme tedy vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$, který je kolmý na dané tři vektory, tedy skalární součiny jsou rovny 0:

$$0 = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = a - b + c$$

$$0 = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = a + c + e$$

$$0 = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = a + b - d + e$$

Řeším proto systém tří lineárních rovnic o pěti neznámých maticově:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tedy je $e = t,\ d = s,\ c = -t - s,\ b = -t,\ a = s$. Ortogonální doplněk tvoří všechny tyto vektory:

$$W^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ -t \\ -t-s \\ s \\ t \end{pmatrix} \middle| s, t \in \mathbf{R} \right\} = \mathrm{Span}\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Příklad č. 2:

Skupina **B** se počítá úplně stejně jen má v poslední složce vektoru 1 místo 2, což nikde během výpočtu nic nezmění.

Hledáme projekci, tj. vektor $Pv = a\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (v tomto tvaru lze napsat, protože projekce leží v prostoru *W*, a tedy je nějakou lineární kombinací jeho báze). Platí $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - Pv$ je kolmý na oba vektory z báze *W*. Proto dostáváme skalární součiny rovny 0:

$$0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - a\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle - a\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle - b\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 3 - 5a - b$$

$$0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - a\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle - a\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle - b\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 3 - a - 5b$$

Tím jsme obdrželi 2 rovnice o dvou neznámých, jejichž řešením je $a = b = \frac{1}{2}$. Tedy výsledkem je kolmá projekce $Pv = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Příklad č. 3:

Nejprve pomocí charakteristického polynomu najdeme vlastní čísla zadané matice:

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4 = -(\lambda-1)^2(\lambda-4)$$

Tedy dostáváme vlastní čísla $\lambda_{1,2} = 1$ a $\lambda_3 = 4$. Najdeme ke každému z nich vlastní prostory, tedy řešení homogenní soustavy $A - \lambda_i E = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Pro $\lambda_{1,2} = 1$ máme $\begin{pmatrix} 2-1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ze které odečteme řešení $u_1 = -s - t,\quad u_2 = s,\quad u_3 = t$. Tedy máme $\mathrm{Eigen}(1) = \mathrm{Span}\left\langle \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$. Pro $\lambda_3 = 4$ máme $\begin{pmatrix} 2-4 & 1 & 1 \\ 1 & 2-4 & 1 \\ 1 & 1 & 2-4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ze které odečteme řešení $u_1 = t,\quad u_2 = t,\quad u_3 = t$. Tedy máme $\mathrm{Eigen}(4) = \mathrm{Span}\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$.

Algebraická násobnost čísla 1 je rovna 2 a je rovna geometrické násobnosti. Algebraická násobnost čísla 4 je rovna 1 a je rovna geometrické násobnosti. Protože se pro všechna vlastní čísla rovnají algebraické násobnosti geometrickým, existuje diagonalizace zmiňovaná v zadání. Vše už máme spočítáno, abychom mohli napsat diagonalizaci *D* i matici *P*:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$