3. ***samostatná*** *písemná práce z MB101. Na řešení máte 50 minut. Na každý papír se prosím čitelně podepište a napište svou skupinu. Pracujte pozorně a rychle. Pokud něčemu v zadání neporozumíte, zeptejte se. Přeji Vám hodně štěstí!!!*

Skupina A

Příklad č. 1 (12 bodů):

Uvažme lineární zobrazení $f:\Re^3 \to \Re^4$. Víme, že

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\quad f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

a) Nejprve spočítejte obrazy $f(\boldsymbol{e}_i)$, kde $\boldsymbol{e}_i$ tvoří kanonickou bázi $\varepsilon_3=\left(e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$. Užijte toho, že víte, že f je lineární, tj. že $f(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y})=af(\boldsymbol{x})+bf(\boldsymbol{y})$. Znamená to, že musíte vhodně volit koeficienty a, b z $\Re$ a volit vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ z $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

b) Pak $f(\boldsymbol{e}_i)$ pro i=1,2,3 postupně tvoří sloupce matice zobrazení $f_{\varepsilon_4\varepsilon_3}$.

c) Najděte předpis tohoto zobrazení.

d) Mějme bázi $\alpha=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$. Najděte matici zobrazení $f_{\alpha\varepsilon_3}$. Buď můžete využít násobení matic, pak $f_{\alpha\varepsilon_3}=(id)_{\alpha\varepsilon_4}\cdot f_{\varepsilon_4\varepsilon_3}$, nebo z definice i-tý sloupec je $\left[f(e_i)\right]_\alpha$ a i=1,2,3.

e) Najděte jádro Ker f a obraz Im f. (Nejlépe pomocí báze jako podprostor $\Re^3$ a $\Re^4$).

Příklad č. 2 (6 bodů):

Ve vektorovém prostoru $\mathrm{P}_2(x)$ polynomů stupně nejvýše 2 s reálnými koeficienty najděte souřadnice polynomu (vektoru) $1\text{-}3x+x^2$ v bázi $\beta=\left(1+x^2, 2+x, x+x^2\right)$.

Příklad č. 3 (6 bodů):

Rozhodněte, zda $M=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \mid ab=cd\right\}$ je vektorový podprostor prostoru všech čtvercových matic typu 2×2 s reálnými koeficienty $\mathrm{Mat}(2,2,\Re)=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \mid a,b,c,d\in\Re\right\}$, ve kterém sčítání vektorů je sčítání matic a násobení skalárem je násobení matice reálným číslem. Své tvrzení dokažte. Tedy ověřte všechny tři podmínky a pokud některá z nich neplatí, uveďte konkrétní protipříklad.

Příklad č. 4 (5 bodů):

Výpočtem determinantu rozhodněte, zda následující vektory tvoří bázi $\Re^4$: $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\\2\end{pmatrix}$.

*3. **samostatná** písemná práce z MB101. Na řešení máte 50 minut. Na každý papír se prosím čitelně podepište a napište svou skupinu. Pracujte pozorně a rychle. Pokud něčemu v zadání neporozumíte, zeptejte se. Přeji Vám hodně štěstí!!!*

Skupina B

Příklad č. 1 (12 bodů):

Uvažme lineární zobrazení $f:\Re^3 \to \Re^4$. Víme, že

$$f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\0\\2\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

a) Nejprve spočítejte obrazy $f(\boldsymbol{e}_i)$, kde $\boldsymbol{e}_i$ tvoří kanonickou bázi $\varepsilon_3=\left(e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$. Užijte toho, že víte, že f je lineární, tj. že $f(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y})=af(\boldsymbol{x})+bf(\boldsymbol{y})$. Znamená to, že musíte vhodně volit koeficienty a, b z $\Re$ a volit vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ z $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

b) Pak $f(\boldsymbol{e}_i)$ pro i=1,2,3 postupně tvoří sloupce matice zobrazení $f_{\varepsilon_4\varepsilon_3}$.

c) Najděte předpis tohoto zobrazení.

d) Mějme bázi $\alpha=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$. Najděte matici zobrazení $f_{\alpha\varepsilon_3}$. Buď můžete využít násobení matic, pak $f_{\alpha\varepsilon_3}=(id)_{\alpha\varepsilon_4}\cdot f_{\varepsilon_4\varepsilon_3}$, nebo z definice i-tý sloupec je $\left[f(e_i)\right]_\alpha$ a i=1,2,3.

e) Najděte jádro Ker f a obraz Im f. (Nejlépe pomocí báze jako podprostor $\Re^3$ a $\Re^4$).

Příklad č. 2 (6 bodů):

Ve vektorovém prostoru $\mathrm{P}_2(x)$ polynomů stupně nejvýše 2 s reálnými koeficienty najděte souřadnice polynomu (vektoru) $1+3x+x^2$ v bázi $\beta=\left(1+x^2, 2+x, x+x^2\right)$.

Příklad č. 3 (6 bodů):

Rozhodněte, zda $M=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\middle|\ ac=bd\right\}$ je vektorový podprostor prostoru všech čtvercových matic typu 2×2 s reálnými koeficienty $\mathrm{Mat}(2,2,\Re)=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\middle|\ a,b,c,d\in\Re\right\}$, ve kterém sčítání vektorů je sčítání matic a násobení skalárem je násobení matice reálným číslem. Své tvrzení dokažte. Tedy ověřte všechny tři podmínky a pokud některá z nich neplatí, uveďte konkrétní protipříklad.

Příklad č. 4 (5 bodů):

Výpočtem determinantu rozhodněte, zda následující vektory tvoří bázi $\Re^4$: $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\2\\2\end{pmatrix}$.