Báze, dimenze, lineární zobrazení 15.11.2011

1. Najděte bázi a určete dimenzi lineárního obalu množiny M :

a) $M = \{(1,2,3),(1,1,0),(0,1,1),(1,1,1),(1,0,0)\}$

b) $M = \{2x-1, x^3+x+1, x^2+x, 2x^2+1, x^3+3x^2+2x+2\}$

2. Uvažujme vektorový prostor $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ reálných matic typu 2×2 a jeho podmnožimu P všech matic $A = (a_{ij})$ takových, že $a_{11} + a_{22} = 0$.

a) Dokažte, že P je vektorový podprostor.

b) Napiště nějakou bázi podprostoru P.

3. Najděte souřadnice vektoru v v bázi α vektorového prostoru $\mathbf{V}$.

a) $v = (2,1,1), \quad \alpha = ((2,7,3),(3,9,4),(1,5,3)), \quad \mathbf{V} = \mathbb{R}^3$

b) $v = 4-4x-2x^3, \quad \alpha = (1-x^2, 1+x, 1-x), \quad \mathbf{V} = \mathbb{R}_2[x]$

c) $v = x^3+x^2+x+1, \quad \alpha = (1+x^3, x+x^3, x^2+x^3, x^3), \quad \mathbf{V} = \mathbb{R}_3[x]$

4. Zjistěte, zda je zobrazení $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineární. Pokud ano, najděte $\mathrm{Ker} f$, $\mathrm{Im} f$ a zapište jej pomocí násobení maticí. Zjistěte, zda je f isomorfismus.

a) $f(x,y) = (2x+3y, x-y)$

b) $f(x,y,z) = (x-2y+z, 2x-y+z, 3y-z)$

5. Určete předpis lineárního zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, pro které platí

$$f(1,0,1) = (1,0,1,0);\ f(1,1,0) = (0,0,0,0);\ f(0,1,1) = (0,1,0,1).$$

6. Matice lineárního zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ v bázi $\alpha = ((1,0,1),(0,1,1),(1,1,0))$ je

$$(f)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Najděte předpis zobrazení f. Zjistěte, zda je f isomorfismus.

Výsledky:
1. $a)(1;0;0),(1;1;0),(1;2;3), \dim M = 3,\ b)2x-1; x^3+x+1; x^2+x; \dim M = 3$
2. (b) báze P je např. $[P] = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.
3. $a)(-5,4,0)^{\mathrm{T}},\ b)(2,-1,3)^{\mathrm{T}},\ c)a)(1,1,1,-2)^{\mathrm{T}}$.
4. a) ano, $Kerf = \{\emptyset\}; Imf = [(2,1);(3,-1)]; A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
b) ano, $Kerf = [(1.-1,-3)]; Imf = [(1,2,0);(-2,-1,3)]; A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
5. $f(x) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3; -x_1 + x_2 + x_3)$.
6. $f(x) = (-2x_1 + x_2, x_2 - x_3, -x_3); f$ je isomorfismus.