Matice přechodu, souřadnice 22. a 24.11.2011

1. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^3[x]$ jsou dány báze $\alpha = (1, x, x^2, x^3), \beta = (1+x, 1-x, x^2+x^3, x^2-x^3)$. Najděte matici přechodu
(a) od báze α k bázi β,
(b) od báze β k bázi α.

2. Nechť $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ je lineární zobrazení v bázích $\alpha = ((1,3),(-2,4))$ a $\beta = ((1,1,1),(2,2,0),(3,0,0))$ definované předpisem

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Najděte matici přechodu od báze α k bázi β,

3. Najděte lineární zobrazení $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, které má v bázích α, β matici

$$(f)_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

jestliže (a) α, β jsou standardní báze prostorů $\mathbf{R}^3 a \mathbf{R}^2$, b) $\alpha = ((1,1,0),(1,-2,0),(0,0,1), \beta = ((2,-1),(0,1))$.

4. Vektor $x \in \mathbf{R}^3$ má v bázi $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$ souřadnice $(x)_\alpha = (1,-3,2)^{\mathrm{T}}$.
Určete jeho souřadnice v bázi $\beta = (v_1, v_2, v_3)$, jestliže víme, že

$$u_1 = 3v_1 + 2v_2 + v_3, u_2 = v_2 - 2v_3, u_3 = v_1 - v_3.$$

Výsledky:

1. a) $f_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ b) $f_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1/2 & 1 \\ 8/3 & 4/3 \end{pmatrix}$

3. a) $f(x) = (x_1 + 2x_3, -x_1 + x_2)$
(b) $f(x) = (4x_1 + 2x_2 + 12x_3, -3x_1 - 3x_2 - 6x_3)$.

4. $a)(x)_\beta = (5,-1,5)^{\mathrm{T}}$