4. cvičení
(10. a 11. 10. 2011)

Zobrazení Nechť A, B jsou libovolné množiny. Předpis f, který každému prvku množiny A přiřazuje právě jeden prvek množiny B, se nazývá **zobrazení množiny A do množiny B**. Píšeme $f : A \to B$
Zobrazení $f : A \to B$ se nazývá

- **injektivní zobrazení (prosté zobrazení)**, jestliže každý prvek z množiny B má při zobrazení f nejvýše jeden vzor.
- **surjektivní zobrazení (zobrazení na)**, jestliže každý prvek z množiny B má při zobrazení f alespoň jeden vzor.
- **bijektivní zobrazení**, jestliže každý prvek z množiny B má při zobrazení f prvåě jeden vzor.

Důkaz, že je zobrazení $f : A \to B$

- **je injektivní**, pak předpokládáme, že pro prvky $x, y \in A$ platí $f(x) = f(y)$ a následně dokážeme, že $x = y$.
- **není injektivní**, pak nalezneme dva konkrétní různé prvky z množiny A, které se zobrazí na stejný prvek v množině B.
- **je surjektivní**, pak vezmeme libovolný (obecný) prvek $b \in B$ a najdeme k němu vzor, tzn. najdeme prvek $a \in A$, pro který platí: $f(a) = b$.
- **není surjektivní**, pak nalezneme v množině B takový konkrétní prvek, který nemá při zobrazení f žádný vzor.

Relace R na množině A je

- reflexivní, jestliže $\forall x \in A \Rightarrow [x, x] \in R$
- symetrická, jestliže $x, y \in A \wedge [x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \in R$
- antisymetrická, jestliže $x, y \in A \wedge [x, y] \in R \wedge [y, x] \in R \Rightarrow x = y$
- tranzitivní, jestliže $x, y, z \in A \wedge [x, y] \in R \wedge [y, z] \in R \Rightarrow [x, z] \in R$

Relace se nazývá relace ekvivalence, jestliže je R, S, T. Značíme $x \sim y$.
Relace se nazývá uspořádání, jestliže je R, A-S, T. Značíme $x \leq y$.

1. Určete matici lineárního zobrazení v $\mathbb{R}^2$, která popisuje otočení o úhel $\frac{\pi}{3}$ v kladném směru.

2. Určete matici lineárního zobrazení v $\mathbb{R}^2$, která popisuje zrcadlení vzhledem k ose y.

3. Určete matici lineárního zobrazení v $\mathbb{R}^2$, která popisuje zrcadlení vzhledem k přímce $y = \sqrt{3}x$ svírající s kladným směrem osy y úhel $\frac{\pi}{6}$. Určete obraz vektoru $u = (\sqrt{3}, 1)$ v tomto zobrazení.

4. Rozhodněte, zda dané zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je injektivní, resp. surjektivní, je-li pro každé $x \in \mathbb{N}$:

   (a) $f(x) = 5x - 3$

   (b) $f(x) = \begin{cases} 6 & x \leq 6 \\ x - 6 & x > 6 \end{cases}$

5. Rozhodněte, zda dané zobrazení f je injektivní, resp. surjektivní, je-li:

   (a) $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}^+, f(x) = x^2$

   (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 7x + 12$

   (c) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f(x) = x^2$

6. Určete složené zobrazení $g \circ f$, $f \circ g$, jestliže $f(x) = 3x - 4$, $g = 2x + \frac{5}{3}$.

7. Rozhodněte, zda jsou následující relace reflexivní, symetrické, antisymetrické, tranzitivní. $m, n \in \mathbb{N}$

   (a) $m \sim n \Leftrightarrow n \mid m$

   (b) $m \sim n \Leftrightarrow n + m \geq 50$

   (c) $m \sim n \Leftrightarrow n + m$ je sudé

   (d) $m \sim n \Leftrightarrow m = n^k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$

   (e) $m \sim n \Leftrightarrow n + m$ je násobkem 3

   (f) $m \sim n \Leftrightarrow m > n$