Domácí úkol č. 11

1. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$ je pro libovolné dva vektory definováno reálné číslo $\langle u, v\rangle$. Rozhodněte, zda je takto v $\mathbb{R}^2$ definován skalární součin.

   (a) $\langle u, v\rangle = 0$

   (b) $\langle u, v\rangle = 4u_1v_1 - 2u_1v_2 - 2u_2v_1 + 5u_2v_2$

2. Rozhodněte, zda dané vektory euklidovského prostoru $\mathbb{R}^4$ jsou ortogonální:

   (a) $(1, -2, 2, 1)^T, (1, 3, 2, 1)^T, (-1, 0, 1, -1)^T$

   (b) $(2, 3, -3, -4)^T, (-1, 3, -3, 4)^T, (3, 1, 3, 0)^T$

3. Určete parametry $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby dané vektory veulidovského prostoru $\mathbb{R}^5$ byly ortogonální:

   (a) $(1, 1, 2, 0, 0)^T, (1, -1, 0, 1, a)^T, (1, b, 2, 3, -2)^T$

   (b) $(2, -1, 0, a, b)^T, (a, b, 0, -2, 1)^T, (a, 2b, 5, b, -a)^T$

4. V euklidovském prostoru $\mathbb{R}^5$ je dán podprostor W. Nalezněte bázi ortogonálního doplňku $W^\perp$:

   (a) $W = Span\langle u_1, u_2, u_3, u_4\rangle$, kde $u_1 = (1, -1, 2, 1, -3)^T, u_2 = (2, 1, -1, -1, 2)^T$
   $u_3 = (1, -7, 12, 7, -19)^T, u_4 = (1, 5, -8, -5, 13)^T$

   (b) $W = Span\langle u_1, u_2, u_3, u_4\rangle$, kde $u_1 = (1, 1, -1, -1, 0)^T, u_2 = (1, -1, -1, 0, -1)^T$,
   $u_3 = (1, 1, 0, 1, 1)^T, u_4 = (-1, 0, -1, 1, 1)^T$

5. V euklidovském prostoru V nalezněte ortogonální projekci vektoru u do podprostoru W:

   (a) $V = \mathbb{R}^3, u = (3, -7, 8)^T, W = Span\langle w_1, w_2\rangle$, $w_1 = (1, 1, -2)^T, w_2 = (3, 1, -1)^T$

   (b) $V = \mathbb{R}^4, u = (-2, 2, 2, 5)^T, W = Span\langle w_1, w_2, w_3\rangle$
   $w_1 = (1, 1, -1, 2)^T, w_2 = (3, 1, 0, 1)^T, w_3 = (2, 0, 1, -1)^T$

   (c) $V = \mathbb{R}^4, u = (1, 2, 3, 4)^T, W = Span\langle (0, 1, 0, 1)^T\rangle$