Bonusové příklady a domácí úloha č. 13

Domácí úlohu poznáte tak, že jsou u ní uvedeny výsledky, u ostatních příkladů výsledky uvedeny nejsou.

1. Do voleb se přihlásilo 10 kandidátů - 6 mužů a 4 ženy. Celkem bude zvoleno 5 kandidátů. Volební řád však říká, že musí být zvoleny aspoň 2 ženy. Kolika způsoby mohou volby dopadnout?

2. Čtěte pozorně (rozlišitelné/nerozlišitelné)! Uvažte, že lze umístit více koulí do jedné přihrádky. Kolika způsoby lze rozdělit (a) 3 rozlišitelné koule do 2 rozlišitelných přihrádek? (b) 3 nerozlišitelné koule do 2 rozlišitelných přihrádek? (c) 3 rozlišitelné koule do 2 nerozlišitelných přihrádek? (d) 3 nerozlišitelné koule do 2 nerozlišitelných přihrádek?

3. Z karetní hry o 32 kartách vybereme náhodně bez vracení 4 karty. Jaká je pravděpodobnost, že aspoň jedna z nich je eso?

4. Střelec střílí na terč o průměru 60cm. Jaká je pravděpodobnost, že zasáhne střed o průměru 6cm?

5. Určete obsah pětiúhelníku daného body: $A = [-1, 4], B = [-2, 1], C = [-1, -5], D = [3, 2], E = [8, 6]$

6. Řada sedadel obsahuje $2n$ míst. Usazujeme na ně n mužů a n žen. Jaká je pravděpodobnost, že žádné dvě osoby stejného pohlaví nebudou sedět vedle sebe?

7. Rozhodněte, zda je následující zobrazení injektivní, surjektivní, popř. bijektivní

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{4x - 5}{12}$$

8. Určete vlastnosti relace $x, y \in \mathbb{R}; [x, y] \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sin(x) = \cos(y)$

9. Určete hodnost matic:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 & 5 \\ 3 & 4 & -5 & 2 \\ 4 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -6 & -7 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 & 0 & 4 \\ 3 & -6 & 1 & 4 & 3 \\ -4 & 2 & 5 & -1 & 7 \\ 5 & -4 & -12 & 5 & -14 \end{pmatrix}$$

10. Podle Frobeniovy věty rozhodněte, zda je soustava řešitelná:

$$\begin{aligned} 5x_1 - 9x_2 + 5x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_1 + 8x_2 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

11. Určete determinant následující matice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

12. Vyřešte soustavu lineárních rovnic s parametrem

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= 1 \\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 3 \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 &= 9 \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 &= a \end{aligned}$$

13. Vypočtěte jádro, obraz a řádkový prostor matice a určete dimenze jednotlivých podprostorů

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

14. Rozhodněte, zda množina $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$ tvoří vektorový podprostor prostoru $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

15. Určete matici přechodu od báze α k bázi β a určete souřadnice vektoru w v bázi β, tj. $[w]_\beta$
$\alpha = ((-3, 0, 3)^T, -3, 2, -1)^T, (1, 6, -1)^T); \beta = (-6, -6, 0)^T, (-2, -6, 4)^T, (-2, -3, 7)^T);$
$[w]_\alpha = (-5, 8, -5)$

16. Metodou nejmenších čtverců řešte následující systém rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad\qquad &= 1 \\ x_2 + x_3 \qquad &= 2 \\ x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 \qquad + x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1 + x_2 \qquad\qquad &= 5 \end{aligned}$$

$[(1, 2, 0, 3)]$

17. Najděte kolmou projekci vektoru $u = (1, 2, 2, 1)^T$ do podprostoru $W = Span\langle(0, 2, 0, 1)^T, (0, 1, 1, 0)^T\rangle$. Jaká je vzdálenost a odchylka vektoru u od podprostoru W?

18. Určete vlastní čísla a vlastní vektory dané matice, určete jejich algebraickou a geometrickou násobnost a rozhodněte, zda je matice diagonalizovatelná; pokud ano, najděte matici D a P.
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

19. Rozhodněte, zda jsou vektory lineárně nezávislé a určete jejich lineární obal.
$u_1 = (3, 8, 7, -3)^T, u_2 = (1, 5, 3, -1)^T, u_3 = (2, -1, 2, 6)^T, u_4 = (1, 4, 0, 3)^T$

20. Spočítejte vlastní čísla matice A. Pak spočítejte vlastní čísla matice A^{-1} a porovnejte je s vlastními čísly matice A.
$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

21. Mějme dánu populaci ve městě a na jeho předměstí. Předpokládá se, že se každý rok 40% obyvetl města přestěhuje na předměstí a naopak 30% obyvatel se z předměstí přestěhuje do města. Jak se ustálí počet obyvatel ve městě a na předměstí?

[43% město a 57% předměstí]

22. V ČR je cca 700 tisíc fotbalistů, což zahrnuje profesionální i amatérské fotbalisty. Analyzujte změny v počtech amatérských a profesionálních hráčů (a jejich dlouhodobý efekt), jestliže každý rok získá 15% amatérských fotbalistů status profesionála a 10% profesionálních hráčů se stane zpět amatéry.

[$\frac{3}{5}$ profesionálů a $\frac{2}{5}$ amatérů]