

1. Rozhodněte, zda je následující zobrazení injektivní, resp. surjektivní:

$$(a) f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = \begin{cases} x - 1 & x = 2k \\ x + 1 & x = 2k - 1 \end{cases} \text{ pro } k = 1, 2, \dots$$

$$(b) f : \mathbb{Q} - \{0\} \rightarrow \mathbb{Q}^+, f(x) = x^2$$

2. Rozhodněte, zda je následující relace reflexivní, symetrická, antisymetrická, tranzitivní a zda se jedná o relaci uspořádání, resp. ekvivalence.

$$(a) x, y \in \mathbb{R} \\ x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

$$(b) x, y \in \mathbb{R} \\ x \sim y \Leftrightarrow \sin x = \sin y$$

$$(c) x, y \in \mathbb{R} \\ x \sim y \Leftrightarrow x \geq y$$

$$(d) x, y \in \mathbb{N} \\ x \sim y \Leftrightarrow x \cdot y \text{ je liché číslo}$$

$$(e) x, y \in \mathbb{N} \\ x \sim y \Leftrightarrow x - y \text{ je sudé číslo}$$

3. Vyřešte soustavu lineárních rovnic v \mathbb{R} :

(a)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 &= -5 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 &= 9 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 &= 7 \\ 11x_1 - 4x_2 - 3x_3 - x_4 &= 10 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 + x_5 &= 4 \\ 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 9 \end{aligned}$$

4. Vypočítejte inverzní matice k následujícím maticím:

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

5. Podle Frobeniovy věty rozhodněte o řešitelnosti soustav lineárních rovnic:

(a)

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 & \quad + 2x_5 & = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 & = -1 \\ & x_3 + 10x_4 & + 15x_6 = 5 \\ 2x_1 + 6x_2 & \quad + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 & = 6 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = 1 \\ -x_1 + 6x_2 - 3x_3 & = 2 \\ -10x_1 + 15x_2 - 11x_3 & = 4 \end{aligned}$$

6. Vypočítejte A^2 , je-li:

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

7. Určete hodnotu matice A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$