

Domáci úkol č. 5

1. Rozhodněte, zda je následující zobrazení injektivní, resp. surjektivní:

$$(a) f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = \begin{cases} x - 1 & x = 2k \\ x + 1 & x = 2k - 1 \end{cases} \text{ pro } k = 1, 2, \dots$$

INJ: Necht' $x, y \in \mathbb{N} \wedge f(x) = f(y) \Rightarrow$

i. $x - 1 = y - 1 \Rightarrow x = y$

ii. $x + 1 = y + 1 \Rightarrow x = y$

SUR: Necht' $y \in \mathbb{N}$ lib. \Rightarrow vzorem k $y = 2k - 1$ pro $k = 1, 2$ je $x = y + 1$ a k $y = 2k$ je $x = y - 1$

\Rightarrow zobrazení je bijektivní

$$(b) f : \mathbb{Q} - \{0\} \rightarrow \mathbb{Q}^+, f(x) = x^2$$

INJ: není, protože např. pro $x = 2, y = -2$ je $f(x) = f(y) = 4$

SUR: není, protože např. $y = 2$ nemá vzor

2. Rozhodněte, zda je následující relace reflexivní, symetrická, antisymetrická, tranzitivní a zda se jedná o relaci uspořádání, resp. ekvivalence.

$$(a) x, y \in \mathbb{R}$$

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

R: $x - x = 0 \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \sim x$

S: $x \sim y \Rightarrow x - y \in \mathbb{Q} \Rightarrow y - x \in \mathbb{Q} \Rightarrow y \sim x$

A-S: není, protože např. $x = 3, y = 2 \Rightarrow x - y = 1 \in \mathbb{Q}, y - x = -1 \in \mathbb{Q} \wedge x \neq y$

T: $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x - y \in \mathbb{Q} \wedge y - z \in \mathbb{Q} \Rightarrow x - z \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \sim z$

jedná se o ekvivalenci

$$(b) x, y \in \mathbb{R}$$

$$x \sim y \Leftrightarrow \sin x = \sin y$$

R: $x \sim x \Rightarrow \sin x = \sin x$ platí

S: $x \sim y \Rightarrow \sin x = \sin y \Rightarrow \sin y = \sin x \Rightarrow y \sim x$

A-S: není, protože např. pro $x = 0, y = \pi$ je $\sin x = \sin y = 0$

T: $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow \sin x = \sin y \wedge \sin y = \sin z \Rightarrow \sin x = \sin z \Rightarrow x \sim z$

jedná se o ekvivalenci

$$(c) x, y \in \mathbb{R}$$

$$x \sim y \Leftrightarrow x \geq y$$

R: ano

S: není, např. pro $x = 3, y = 1$

A-S: ano

T: ano

jedná se o uspořádání

$$(d) x, y \in \mathbb{N}$$

$$x \sim y \Leftrightarrow x \cdot y \text{ je liché číslo}$$

R: není, např. pro $x = 2 \Rightarrow x \cdot x = 4$ - není liché

S: ano

A-S: není, např. pro $x = 3, y = 5 \Rightarrow x \cdot y = 15$ - je liché a $x \neq y$

T: ano

(e) $x, y \in \mathbb{N}$

$x \sim y \Leftrightarrow x - y$ je sudé číslo

R: ano

S: ano

A-S: není, např. pro $x = 3, y = 5 \Rightarrow x - y$ je sudé, $y - x$ je sudé, ale $x \neq y$

T: ano

jedná se o ekvivalenci

3. Vyřešte soustavu lineárních rovnic v \mathbb{R} :

(a)

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2$$

$$2x_1 - x_2 + 5x_3 = -5$$

$$3x_1 + x_2 - 4x_3 = 9$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & -5 \\ 3 & 1 & -4 & 9 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & -9 \\ 0 & -5 & -13 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -12 & 12 \end{array} \right) \Rightarrow [1, 2, -1]$$

(b)

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 4$$

$$x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 7$$

$$11x_1 - 4x_2 - 3x_3 - x_4 = 10$$

řešení neexistuje

(c)

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 2$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 + x_5 = 4$$

$$3x_1 + 6x_2 - 6x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 9$$

$$x_1 = 1 - 2t + 16s, x_2 = t, x_3 = -1 + 5s, x_4 = 2s, x_5 = 11s$$

4. Vypočítejte inverzní matice k následujícím maticím:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Podle Frobeniovy věty rozhodněte o řešitelnosti soustav lineárních rovnic:

(a)

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 & \quad + 2x_5 & = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 & = -1 \\ & \quad x_3 + 10x_4 & + 15x_6 = 5 \\ 2x_1 + 6x_2 & \quad + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 & = 6 \end{aligned}$$

rovnice má alespoň jedno řešení

(b)

$$\begin{aligned} 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = 1 \\ -x_1 + 6x_2 - 3x_3 & = 2 \\ -10x_1 + 15x_2 - 11x_3 & = 4 \end{aligned}$$

rovnice nemá řešení

6. Vypočítejte A^2 , je-li:

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(b) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 4 & 0 \\ 13 & 4 & 8 \\ 2 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

7. Určete hodnost matice A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h(A) = 2$$