

Domácí úkol č. 7

1. Zjistěte, zda jsou dané vektory lineárně závislé nebo nezávislé.

$$(a) \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{LZ}$$

$$(b) \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_5 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 6 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -9 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 6 & 4 \\ 0 & -5 & 10 & -12 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -13 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{LZ}$$

2. Jsou uvedené prvky lineárně nezávislé? $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

v $(Mat_{2 \times 2}(\mathbb{Z}), +, \cdot)$

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a + b + 2c = 0$$

$$2a + b + 3c = 0$$

$$a + c = 0$$

$$2a + b + 3c = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow c = t, b = -t, a = -t \Rightarrow \text{matice}$$

jsou LZ, protože jsme našli nenulová a, b, c

3. Ověřte, zda se jedná o vektorové prostory:

$$(a) \quad V = \mathbb{C}, (a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i, \alpha \cdot (a + bi) = \alpha \cdot a + (\alpha \cdot b)i$$

$$(b) \quad V = Mat_{2 \times 3}(\mathbb{R}), \text{ sčítání matic, násobení matic reálným číslem}$$

$$(c) \quad V = \{(x, y)\}, (x, y) + (u, v) = (x + u, y + v), k \cdot (x, y) = (2kx, 2ky)$$

všechno to jsou vektorové prostory