Domácí úkol č. 8

1. Určete jádro, obraz, řádkový prostor matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

2. Určete jádro a obraz matice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. Určete bázi vektorového podprostoru $M = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ v $\mathrm{Mat}_{2x2}(\mathbb{R})$

4. Tvoří vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ bázi $\mathbb{R}^3$?

5. Určete souřadnice vektoru $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = [w]_e$ v bázi

   $\alpha = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

6. Uvažujme komplexní čísla jako vektorový prostor nad reálnými čísly - sčítání vektorů je sčítání komplexních čísel. Ukažte, že čísla $1 + i, 1 - i$ tvoří bázi tohoto prostoru a napište součadnice čísla $5 - 2i$ v této bázi.

7. Doplňte množinu M tak, aby byla bází prostoru V:

   (a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, V = \mathbb{R}^4$

   (b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}, V = \mathrm{Mat}_{2x2}(\mathbb{R})$

8. Zjistěte, zda jsou vektory lineárně nezávislé. Pokud jsou lineárně závislé, napište jeden jako lineární kombinaci ostatních. (Návod: napište si rovnici, podle které určujete LN nebo LZ vektory a pokud jsou LZ, vyjádřete vektor z této rovnice)

   $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

9. Rozhodněte, zda se jedná o vektorový

   (a) prostor: $V = \mathbb{R}^3$, sčítání: $(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$, násobení: $k \cdot (x_1, x_2, x_3) = (kx_1, x_2, x_3)$

   (b) podprostor: $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x^2\}$

   (c) podprostor: $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2\}$

   (d) podprostor: $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = y + 1\}$

   (e) podprostor: $M = \{(a, 1, 1) \in \mathbb{R}^3\}$

10. Ze zadaných vektorů vyberte bázi $\text{Span}\langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\rangle$ a zbývající vektory vyjádřete jako lineární kombinace vektorů vámi vybrané báze.
    $u_1 = (1, 3, -2, -1, 2)^T$
    $u_2 = (2, -1, 3, -2, -3)^T$
    $u_3 = (3, 2, 1, -3, -1)^T$
    $u_4 = (2, -38, 4, -1, -4)^T$
    $u_5 = (3, 5, -4, -1, 4)^T$