

1. Rozhodněte, zda podmnožina $W \subseteq \mathbb{R}^3$ je podprostorem vektorového prostoru \mathbb{R}^3 , je-li:

- a) $W = \{ (x, y, z) \mid x = \sqrt{2}y + \sqrt{3}z \}$
- b) $W = \{ (x, y, z) \mid x=0 \vee y=0 \vee z=0 \}$
- c) $W = \{ (x, y, z) \mid y=z \}$
- d) $W = \{ (2s+t, s, t) \mid t, s \in \mathbb{R} \text{ libovolné} \}$

2. Určete, zda jsou vektory lineárně závislé nebo nezávislé:

- a) $V = \mathbb{R}^4$, $u_1 = (0, -1, 2, 3)^T$, $u_2 = (2, 1, -1, -2)^T$, $u_3 = (1, 0, 1, 1)^T$
- b) $V = P_3$, $p_1 = 2x^2 + x - 4$, $p_2 = x^2 - 3$, $p_3 = (x + 1)^2$
- c) $V = P_3$, $p_1 = x^2 + x + 1$, $p_2 = x \cdot (x^2 + x + 1)$, $p_3 = (x + 1)^2$

3. Rozhodněte pomocí determinantu o lineární závislosti/nezávislosti vektorů:

- a) $V = \mathbb{R}^4$, $u_1 = (1, 1, -1, 2)^T$, $u_2 = (-4, 1, 1, -3)^T$, $u_3 = (2, -3, 1, -1)^T$, $u_4 = (1, 1, 1, 1)^T$
- b) $V = \mathbb{Q}^3$, $u_1 = (1, 2, -2)^T$, $u_2 = (-2, -3, 1)^T$, $u_3 = (-1, 2, 2)^T$

4. Nalezněte všechna $r \in \mathbb{R}$, pro která $w = (r, 1, 2)$ leží v podprostoru

$W = \text{Span}\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ vektorového prostoru \mathbb{R}^3 , je-li:

- a) $u_1 = (1, 2, -1)^T$, $u_2 = (1, 1, 0)^T$, $u_3 = (2, -1, 3)^T$
- b) $u_1 = (1, 2, -1)^T$, $u_2 = (2, -1, 1)^T$, $u_3 = (-1, 1, 2)^T$

5. Vypočtěte jádro, obraz a řádkový prostor matice. Určete dimenzi jednotlivých podprostorů:

- a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
- b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 & 8 \\ 5 & 3 & 1 & 7 \\ -4 & -1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$
- c) $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

6. Určete bázi a dimenzi $\langle M \rangle$:

- a) $M = \{u_1 = (1, 2, 0, 0)^T, u_2 = (0, 0, 0, 0)^T, u_3 = (1, 2, 3, 4)^T, u_4 = (3, 6, 0, 0)^T\}$
- b) $M = \{u_1 = (2, 1, -3, 1)^T, u_2 = (4, 2, -6, 2)^T, u_3 = (6, 3, -9, 3)^T, u_4 = (1, 1, 1, 1)^T\}$
- c) $M = \{u_1 = (1, 1, 1, 1)^T, u_2 = (1, -1, 1, 1)^T, u_3 = (1, 1, -1, 1)^T, u_4 = (1, 1, 1, -1)^T\}$
- d) $M = \{u_1 = (1, 2, 3, -4)^T, u_2 = (2, 3, -4, 1)^T, u_3 = (2, -5, 8, -3)^T, u_4 = (5, 26, -9, -12)^T, u_5 = (3, -4, 1, 2)^T\}$
- e) $M = \{2x-1, x^3 + x + 1, x^2 + x, 2x^2 + 1, x^3 + 3x^2 + 2x + 2\}$

7. Nalezněte matici přechodu od báze α k bázi β a určete souřadnice $[\underline{w}]_\beta$:

- a) $\alpha = ((1, 2)^T, (-2, 3)^T)$, $\beta = ((3, 1)^T, (2, 1)^T)$, $[\underline{w}]_\alpha = (2, 3)$
- b) $\alpha = ((-3, 0, -3)^T, (-3, 2, -1)^T, (1, 6, -1)^T)$, $\beta = ((-6, -6, 0)^T, (-2, -6, 4)^T, (-2, -3, 7)^T)$, $[\underline{w}]_\alpha = (-5, 8, -5)$
- c) $\alpha = (1, x, x^2)$, $\beta = (1, x + 1, 1 - x^2)$, $[\underline{w}]_\alpha = (2x^2 - x + 2)$