D.Ú. 9

(1) Rozhodněte, zda je zadáno lineární zobrazení L:

a) $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1+3x_2 \\ 4x_3+5 \end{pmatrix}$

b) $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1+2x_2+3x_3$

c) $L: P_2 \to P_3$, $L(ax^2+bx+c) = 3ax^3+2bx^2+cx$

(2) Nalezněte jádro a obraz lin. zobrazení φ:

a) $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_2+x_3 \\ x_3+x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$

b) $\varphi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1-x_2+2x_3-x_4 \\ 5x_1+2x_2+3x_3 \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4 \end{pmatrix}$

c) φ je zadáno určením obrazů báze:

$\varphi(1,2,1) = (-1,1,1,1)$

$\varphi(0,1,2) = (1,0,0,1)$

$\varphi(1,0,-1) = (0,1,1,2)$

(3) Určete matici zobrazení L v bázích α a β

$L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1-x_3 \\ x_1+x_2 \end{pmatrix}$ $\alpha = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, $\beta = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

a určete souřadnice $L(v)$ v β, pokud $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(4) Matice zobrazení $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ v bázi $\alpha = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T\right)$ je tvaru $A_{\alpha\alpha} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Určete tvar matice zobrazení f ve stand. bázi.

④ Je dána matice zobrazení $A_{e,e}$. Určete matici tohoto zobrazení v bázi β.

$$A_{e,e} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

⑤ Známe $A_{\beta\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\alpha = \left((1,1,0)^T, (1,-2,0)^T, (0,0,1) \right)$

$$\beta = \left((2,-1)^T, (0,1)^T \right)$$

Určete matici zobrazení ve standardní bázi.

⑥ Je skalární součin v P_2 definován korektně?

a) $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = 1$

b) $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2$

① a) ne
b) ano
c) ano

② a) $\operatorname{Im}\varphi = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$ $\operatorname{Ker}\varphi = \underline{o} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

b) $\operatorname{Im}\varphi = \left\langle \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} \right\rangle$, $\operatorname{Ker}\varphi = \left\langle \begin{pmatrix}-1\\1\\11\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-5\\0\\11\end{pmatrix} \right\rangle$

c) $\operatorname{Im}\varphi = \left\langle \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix} \right\rangle$, $\operatorname{Ker}\varphi = \left\langle \begin{pmatrix}0\\-3\\-4\end{pmatrix} \right\rangle$

③ $A_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 5 & 2 & 1\end{pmatrix}$

④ $A_{\beta,\beta} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{4} & 2 & -\frac{3}{4}\\ \frac{5}{4} & 0 & \frac{7}{4}\\ \frac{3}{4} & -2 & \frac{9}{4}\end{pmatrix}$

⑤ $A_{ee} = \begin{pmatrix}\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 4\\ -1 & -1 & -2\end{pmatrix}$

⑥ a) ano
b) ne