

4. Úkol - Relace a zobrazení

1. ÚLOHA

Nalezněte obrazy množin $A = 1, 2, 3$, $B = (-1, 1)$, $C = -5 \cup (0, \infty)$ při zobrazeních

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

(b) $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1}$

2. ÚLOHA

Nechť je $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$ dána předpisem $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$ a $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ dána předpisem $g(x) = \frac{1}{x} - 2$. Jak bude vypadat složené zobrazení $f \circ g$?

3. ÚLOHA

Nalezněte inverzní zobrazení f^{-1} a ověřte správnost zpětným složením.

(a) $f : [0, 1] \rightarrow [1, 3]$, $f(x) = 2x + 1$

(b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 1$

(c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, $f(x) = 10^{x-2}$

4. ÚLOHA

Rozhodněte, zda jsou následující zobrazení injektivní, surjektivní, případně bijektivní.

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$

(b) $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \sin(x)$

(c) $f : [0, 2] \rightarrow [0, 3]$

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ x + 1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

5. ÚLOHA

Rozhodněte a dokažte, zda jsou následující relace na množině reálných čísel \mathbb{R} reflexivní, symetrické, tranzitivní či antisymetrické.

(a) $a \sim b \Leftrightarrow a \leq b^2$

(b) $a \sim b \Leftrightarrow a \cdot b \leq 1$.

6. ÚLOHA

Rozhodněte a dokažte, zda jsou následující relace na množině přirozených čísel \mathbb{N} reflexivní, symetrické, tranzitivní či antisymetrické.

(a) $n \sim m \Leftrightarrow n + m$ je sudé

(b) $n \sim m \Leftrightarrow m > n$.

7. ÚLOHA

Na \mathbb{R} definujeme relaci R předpisem

$$(x, y) \in R \Leftrightarrow (\exists c \geq 1 \wedge c \cdot x = y).$$

Dokažte, že R je uspořádání na \mathbb{R} .