Příklady k zápočtu (MB101 Matematika I, skupina 04)

1. ÚLOHA
   Ukažte, že množina $A = \{a = (a_1, a_2); a_1, a_2 \in (0, \infty)\}$ s operacemi $a + b = (a_1b_1, a_2b_2)$ a $xa = (a_1^x, a_2^x)$, kde $x \in \mathbb{R}$, tvoří vektorový prostor nad reálnými čísly.

2. ÚLOHA
   Určete, zda je množina $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3; x + y + z = 1\}$ vektorovým podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{C}^3$.

3. ÚLOHA
   Jsou vektory $v_1 = (4, -5, 2, 6)$, $v_2 = (2, -2, 1, 3)$, $v_3 = (6, -3, -3, 9)$, $v_4 = (4, -1, 5, 6)$ z $\mathbb{R}^4$ lineárně závislé? Pokud ano, najděte lineární kombinaci, která netriviálně dává 0 (nulový vektor).

4. ÚLOHA
   Určete, jaká je dimenze lineárního obalu funkcí f, g, h (uvažovaných na netriviálním intervalu):

$$\begin{aligned} f(x) &= asin(x) - 4cos(x) - sin(2x) \\ g(x) &= 4sin(x) - 6cos(x) - 3sin(2x) \\ h(x) &= sin(x) + cos(x) - asin(2x) \end{aligned}$$

   v závislosti na reálném parametru a.

5. ÚLOHA
   Nechť $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je lineární zobrazení definované předpisem $\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1 - \alpha_3, \alpha_2 - \alpha_1)$, kde $x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Nalezněte jádro, dimenzi jádra, obraz a dimenzi obrazu tohoto zobrazení.

6. ÚLOHA
   Určete souřadnice vektoru $v = (2, 5, 6)$ vzhledem k bázi $B = \{u_1, u_2, u_3\} = \{(1, 2, 1), (1, 1, -3), (-7, 4, -1)\}$ a zapište vektor v jako příslušnou lineární kombinaci.

7. ÚLOHA
   Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány dvě množiny vektorů S a N.

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{s_i\}$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{n_i\}$$

   Dále buď T lineární zobrazení $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definované takto:

$$Tx = T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_2 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}$$

   (a) Ověřte, že množiny S i N tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$.
   (b) Určete souřadnice vektorů n_i vůči bázi S. Určete souřadnice vektorů s_i vůči bázi N.
   (c) Najděte matici lineárního zobrazení T vůči bázi S a vůči bázi N.