Příklad 1: Najděte ortogonální doplněk k množině

$$W = \text{span}\Big\langle (1,-1,1,0,0),(1,0,1,0,1),(1,1,0,-1,1)\Big\rangle.$$

$$\Big[\text{span}\Big\langle (1,0,-1,1,0),(0,-1,-1,0,1)\Big\rangle\Big]$$

Příklad 2: Ve vektorovém prostoru matic $\text{Mat}_{2\times 2}$ mějme podprostor W generovaný maticemi

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, U_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Určete bázi a dimenzi vektorového podprostoru W a určete bázi ortogonálního doplňku podprostoru W, tj. podprostoru $W^{\perp}$.

$$\Big[W = \text{span}\Big\langle U_1, U_2, U_3\Big\rangle, \, \text{dim}W = 3, W^{\perp} = \text{span}\Big\langle \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Big\rangle\Big]$$

Příklad 3: Určete nejlepší lineární aproximaci (regresní přímku) zadaných bodů

$$[0,1],[1,4],[2,2],[3,2].$$

Pozn.: K řešení se podívejte na příklady 127-129 z přednášky (str. 113-115), ať víte, jak si sestavit matici A a vektor b pro řešení metodou nejmenších čtverců.

$$\big[y = 2/5x + 7/5\big]$$

Příklad 4: Mějme vektorový podprostor V generovaný vektory $u_1 = (2,0,-1)$, $u_2 = (-1,1,1)$, $u_3 = (1,1,1)$. Pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu určete ortogonální bázi podprostoru V.

$$\Big[\big((\tfrac{2}{\sqrt{5}}, 0, \tfrac{-1}{\sqrt{5}}), (\tfrac{1}{\sqrt{30}}, \tfrac{5}{\sqrt{30}}, \tfrac{2}{\sqrt{30}}), (\tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{-1}{\sqrt{6}}, \tfrac{2}{\sqrt{6}})\big)\Big]$$

Příklad 5: Mějme vektorový podprostor V generovaný vektory $u_1 = (1,2,2,-1)$, $u_2 = (1,1,-5,3)$, $u_3 = (-1,3,3,1)$. Pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu určete ortogonální bázi podprostoru V.

$$\Big[\big((1,2,2,-1),(2,3,-3,2),(-2,1,1,2)\big)\Big]$$

Příklad 6: Ve vektorovém prostoru matic $\text{Mat}_{2\times 2}$ mějme podprostor W generovaný maticemi

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, U_3 = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu určete ortogonální bázi $\beta = (V_1, V_2, V_3)$ podprostoru W. Poté určete souřadnice matice $X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$ vzhledem k této vypočtené ortogonální bázi β.

$\Big[V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, souřadnice matice X v této ortogonální bázi jsou $(1,3,1)\Big]$

Příklad 7: Ve vektorovém prostoru matic $\mathrm{Mat}_{2\times 2}$ mějme podprostor W generovaný maticemi

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, U_3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu určete ortogonální bázi $\beta = (V_1, V_2, V_3)$ podprostoru W. Poté určete souřadnice matice $X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ vzhledem k této vypočtené ortogonální bázi β.

$\Big[V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, souřadnice matice X v této ortogonální bázi jsou $(3, 1, -2)\Big]$

Příklad 8: Uvažujme podprostor $W \subseteq R^4$ a vektor $x \notin W$, kde

$$W = \mathrm{span}\Big\langle (1,0,0,1), (0,1,1,0) \Big\rangle, x = (1, 2, -1, 2).$$

Určete vzdálenost a odchylku vektoru x od podprostoru W.

$\Big[$ vzdálenost $= 5$, odchylka $\varphi = 45°\Big]$

Příklad 9: Uvažujme podprostor $W \subseteq R^4$ a vektor $x \notin W$, kde

$$W = \mathrm{span}\Big\langle (5,1,3,3), (3,-1,-3,5) \Big\rangle, x = (4, 2, -5, 3).$$

Najděte kolmý průmět vektoru x do podprostoru W.

$\Big[(5/2, -1, -3, 9/2)\Big]$

Příklad 10: Uvažujme podprostor $W \subseteq R^4$ a vektor $x \notin W$, kde

$$W = \mathrm{span}\Big\langle (5,1,3,3), (3,-1,-3,5), (3,-1,5,-3) \Big\rangle, x = (4, 2, -5, 3).$$

Najděte kolmý průmět vektoru x do podprostoru W.

$\Big[(2, 0, -3, 5)\Big]$

Příklad 11: Určete vzdálenost bodu $A = (4, 1, -4, -5)$ od roviny $P : (3, -2, 1, 5) + t(2, 3, -2, -2) + s(4, 1, 3, 2)$.
Nápověda: Stejný postup jako u příkladů, kde se hledá vzdálenost vektoru od podprostoru. Vektor tady získáme jako $x = A - B, B = (3, -2, 1, 5)$ a podprostor je rovina, která je generovaná dvěma vektory, které máme zadané.

$\Big[$ vzdálenost $= 5\Big]$