Skupina C

*2.**samostatná** písemná práce z MB101. Na řešení máte 40 minut. Na každý papír se prosím čitelně podepište a napište svou skupinu. Pracujte pozorně. Pokud něčemu v zadání nerozumíte, zeptejte se. Přeji Vám hodně štěstí!!!*

Příklad č. 1: Pomocí úpravy matice systému linearních rovnic najděte množinu řešení tohoto systému:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + x_3 - x_4 &= 2 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$

Řešení. Nejprve sestavíme matici soustavy, kterou následně upravíme na schodovitý tvar:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim ... \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Nyní již zbývá pouze dopočítat řešení: $x_4 = 0$, $x_3 = 1$, $x_2 = 0$ a $x_1 = 1$.

Příklad č. 2: Zjistěte, zda vektor $u = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}'$ náleží do lineárního obalu množiny

$$M = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Řešení. Vektor patří do lineárního obalu této množiny, jestliže jej lze vyjádřit jako lineární kombinaci těchto vektorů. Proto ověříme, zda má tato soustava nějaké řešení. Jestliže ano, pak vektor patří do lineárního obalu.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim ... \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{-3}{4} \end{array}\right)$$

Matici jsme upravili na schodovitý tvar a je vidět, že soustava má nekonečně mnoho řešení, a proto vektor patří do lineárního obalu.

Příklad č. 3: Určete hodnost matice A a v případě, že existuje, nalezněte inverzní matici:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení. Nejprve ověříme hodnost tak, že matici upravíme na schodovitý tvar a zjistíme počet lineárně nezávislých řádků:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Odtud plyne, že hodnost matice je 3 a existuje tedy její inverzní matice. Tu vypočteme na základě úpravy následující blokové matice:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim ... \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-4}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Na pravé straně za lomítkem máme hledanou inverzní matici.

Příklad č. 4: Vypočtěte determinant matice B

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení. Determinant je možné vypočíst např. Laplaceovým rozvojem podle třetího sloupce, kde je nejvíce nul. Ale také můžeme použít EŘO. Výsledek pak je 3.