

Skupina D

3. **samostatná** písemná práce z MB101. Na řešení máte 40 minut. Na každý papír se prosím čitelně podepište a napište svou skupinu. Pracujte pozorně. Pokud něčemu v zadání nerozumíte, zeptejte se. Přeji Vám hodně štěstí!!!

Příklad č. 1: Určete dimenzi a najděte nějakou bázi podprostoru

$$V = \text{span} \left\langle (2, 0, 1)^T, (1, 1, 4)^T, (2, 1, 1)^T, (3, 0, 2)^T, (2, 2, 1)^T, (1, 2, 0)^T \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$$

Řešení. Bázi určíme tak, že vybereme lineárně nezávislé vektory z této množiny, tedy vektory naskládáme do matice a tu upravíme na schodovitý tvar:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & -1 & 14 & 153 \end{pmatrix}$$

Odtud je vidět, že bázi můžeme vytvořit například z prvních tří vektorů. Dimenze udává počet vektorů v bázi, tedy $\dim V = 3$.

Příklad č. 2: Uvažujme vektorový prostor $\text{Mat}_{2 \times 2}$ matic řádu 2 a v něm množinu W takových matic, které mají součet prvků v každém jednotlivém řádku roven 0 a současně mají součet prvků v každém jednotlivém sloupci roven 0. Určete, jestli je W vektorový podprostor v prostoru $\text{Mat}_{2 \times 2}$.

Řešení. V prostoru W leží matice tvaru

$$\begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix}$$

Aby se skutečně jednalo o vektorový podprostor, musí být splněny 3 podmínky:

1. $W \neq \emptyset$, tato podmínka je splněna, neboť např. matice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ leží ve W .
2. $\forall u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$, podmínka je splněna:

$$\begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & -b \\ -b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & -a-b \\ -a-b & a+b \end{pmatrix}$$

Odtud je vidět, že součet také patří do W .

3. $\forall t \in \mathbb{R}, \forall u \in W \Rightarrow au \in W$

$$t \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta & -ta \\ -ta & ta \end{pmatrix}$$

Také třetí podmínka je tedy splněna. Jedná se proto o vektorový podprostor.

Příklad č. 3: Zjistěte, zda je zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineární:

$$f((x, y, z)) = (2y - z, 3x + 2y).$$

Jestliže ano, pak určete $\text{Ker} f$ a $\text{Im} f$.

Řešení. Nejprve ověříme platnost linearity. Tedy

1.

$$\begin{aligned} f((x, y, z) + (k, l, m)) &= f((x + k, y + l, z + m)) = \\ (2y - 2l - z - m, 3x + 3k + 2y + 2l) &= (2y - z, 3x + 2y) + (2l - m, 3k + 2l) \\ &= f((x, y, z)) + f((k, l, m)) \end{aligned}$$

2.

$$af((x, y, z)) = a(2y - z, 3x + 2y) = (2ay - az, 3ax + 2ay) = f((ax, ay, az))$$

Linearita je tedy splněna. Nyní najdeme jádro $\text{Ker} f$. Víme, že podle definice musí platit

$$(2y - z, 3x + 2y) = (0, 0)$$

A odtud dostáváme $2y - z = 0$ a zároveň $3x + 2y = 0$. Řešením této soustavy dostáváme $z = -3t$, $y = -\frac{3}{2}t$ a $x = t$, kde $t \in \mathbb{R}$ je parametr. A tedy platí

$$\text{Ker} f = (t, -\frac{3}{2}t, -3t)^T = t(1, -\frac{3}{2}, -3)^T = \text{span} \left\langle (1, -\frac{3}{2}, -3)^T \right\rangle$$

Obraz $\text{Im} f$ nalezneme tak, že se podíváme, kam se zobrazují vektory báze \mathbb{R}^3 . Tedy

$$\begin{aligned} f((1, 0, 0)) &= (0, 3) \\ f((0, 1, 0)) &= (2, 2) \\ f((0, 0, 1)) &= (-1, 0) \end{aligned}$$

A odtud dostáváme

$$\text{Im} f = \text{span} \langle (0, 3)^T, (2, 2)^T, (-1, 0)^T \rangle = \langle (0, 3)^T, (2, 2)^T \rangle = \mathbb{R}^2$$

Příklad č. 4:

- Určete souřadnice $[u]_\alpha$ vektoru $u = x^2 + 2x + 3$ v bázi $\alpha = \{x^2 + x, x^2 + 1, x + 1\}$ prostoru $\mathbb{R}_2[x]$.
- Určete vektor v (pozor, jsme v prostoru polynomů), jsou-li jeho souřadnice v bázi $\alpha = \{x^2 + x, x^2 + 1, x + 1\}$ rovny $[v]_\alpha = (-3, 0, 2)^T$.

Řešení. 1. K řešení můžeme použít matici přechodu od standardní báze k bázi α . Vektor u je nyní ve standardní bázi a my chceme jeho souřadnice v bázi α . Nebo můžeme příklad vyřešit i bez matice přechodu a to tak, že budeme řešit soustavu rovnic:

$$x^2 + 2x + 3 = a(x^2 + x) + b(x^2 + 1) + c(x + 1)$$

tedy

$$1 = a + b$$

$$2 = a + c$$

$$3 = b + c$$

Odtud dostáváme, že $a = 0$, $b = 1$ a $c = 2$. Platí tedy $(u)_\alpha = (0, 1, 2)^T$.

2. Souřadnice nám udávají toto:

$$v = -3(x^2 + x) + 0(x^2 + 1) + 2(x + 1)$$

Odtud tedy

$$v = -3x^2 - x + 2.$$