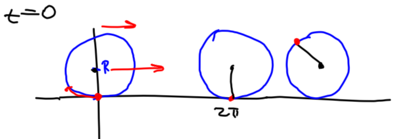
Příklad 1. Odvoďte parametrické vyjádření cykloidy a hypocykloidy.

$t=0$



$x = x_p + x_r$, $y = y_p + y_r$

$x_p(t) = t \cdot R$, $y_p(t) = R$

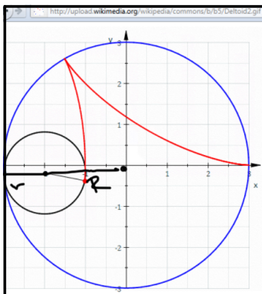
$\boxed{x_r = -y'_r = -R\sin t,\quad y_r = -x'_r = -R\cos t}$ $\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

Jinak: $R\cos(\frac{3\pi}{2} - t), R\sin(\frac{3\pi}{2} - t)$

$x = R(t - \sin t)$

$y = R(1 - \cos t)$

11 21-17:52



$x = x_s + x_o$

$y = y_s + y_o$

střed se pohybuje po kružnici s poloměrem $R-r$

$x_s = (R-r)\cos t$

$y_s = (R-r)\sin t$

$x_o = r \cdot \cos(-\alpha)$

$y_o = r \cdot \sin(-\alpha)$

α ... úhlová rychlost pohybu po malé kružnici

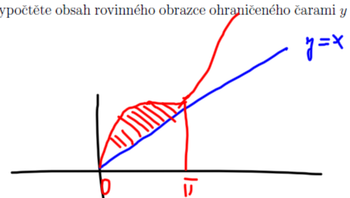
$\frac{\alpha}{t} = \frac{R-r}{r}$

$x = (R-r)\cos t + r \cdot \cos\left(-t \cdot \frac{R-r}{r}\right)$

$y = (R-r)\sin t + r\sin\left(-t \cdot \frac{R-r}{r}\right)$

11 21-17:59

Příklad 2. Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného čarami $y = x$, $y = x + \sin^2 x$, $x = 0$, $x = \pi$.



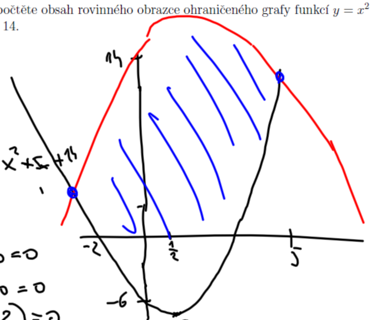
$$\int_0^\pi [(x+\sin^2 x) - x]\,dx = \int_0^\pi \sin^2 x\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x \\ \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \end{array} \right| = \int_0^\pi \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

11 21-17:53

Příklad 3. Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného grafy funkcí $y = x^2 - x - 6$, $y = -x^2 + 5x + 14$.



$x^2 - x - 6 = -x^2 + 5x + 14$

$2x^2 - 6x - 20 = 0$

$x^2 - 3x - 10 = 0$

$(x-5)(x+2) = 0$

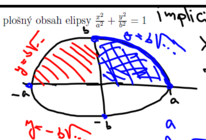
$$\int_{-2}^{5} (-x^2+5x+14) - (x^2-x-6)\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{5} -2x^2 + 6x + 20\,dx = \left[-2\frac{x^3}{3} + 3x^2 + 20x\right]_{-2}^{5} =$$

$$= \left(-\frac{250}{3} + 75 + 100 - \frac{16}{3} - 12 + 40\right) = \frac{343}{3}.$$

11 21-17:54

Příklad 4. Vypočtěte plošný obsah elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ implicitní rovnice



$x = a \cdot \cos t$

$y = b \cdot \sin t$

$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$

$y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$

$$\frac{1}{4}S = \int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx = b\int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} \text{subst.} & \\ x = a\cos t & x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ dx = -a\sin t\,dt & x = a \Rightarrow t = 0 \end{array} \right| =$$

$$= b \cdot \int_{\pi/2}^{0} \sin t \cdot (-a) \cdot \sin t\,dt = ab \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^2 t\,dt =$$

$$\dots = ab \cdot \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} \cdot ab$$

$\Rightarrow$ $\underline{S = \pi \cdot a \cdot b}$

JINAK: přímo z parametrického vyjádření

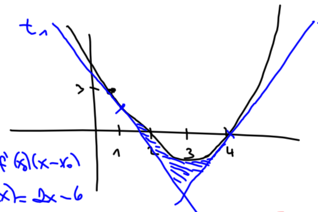
$x = a\cos t$ $\quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$y = b\sin t$

$$S = \int_0^{a} y(t)\,\underset{x'(t)}{dx} = \int_{\pi/2}^{0} b\sin t \cdot a(-\sin t)\,dt = \dots$$

11 21-17:55

Příklad 5. Vypočtěte plošný obsah obrazce ohraničeného částí paraboly $y = x^2 - 6x + 8$ a jejími tečnami v bodech dotyku $[1, 3]$ a $[4, 0]$.



$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

$y = f'(x) = 2x - 6$

$t_1: y - 3 = -4(x-1)$, $y = -4x + 7$

$t_2: y - 0 = 2(x-4)$, $y = 2x - 8$

průsečík: $-4x + 7 = 2x - 8$

$15 = 6x$

$\frac{5}{2} = x$

$$S_1 = \int_1^{5/2} (x^2 - 6x + 8) - (-4x + 7) = \dots = \frac{9}{8}$$

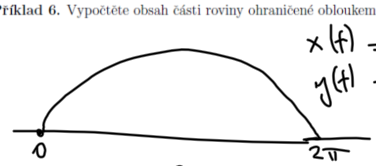
$$S_2 = \int_{5/2}^{4} (x^2 - 6x + 8) - (2x - 8) = \dots = \frac{9}{8}$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{9}{4}$$

11 21-17:55

Příklad 6. Vypočtěte obsah části roviny ohraničené obloukem cykloidy a osou x.

$x(t) = R(t - \sin t)$
$y(t) = R(1 - \cos t)$



$$\int_0^{2\pi} y(t)\cdot \underset{x'(t)\cdot dt}{\underset{\parallel}{dx}} = \int_0^{2\pi} R(1-\cos t)\cdot R(1-\cos t)\,dt =$$

$2\cos^2 t - 1 = \cos 2t$
$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$

$$= R^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt = R^2\int_0^{2\pi} 1 - 2\cos t + \cos^2 t\,dt =$$

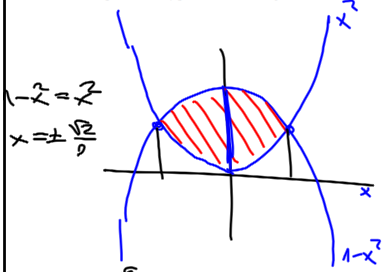
$$= R^2\cdot\left([t - 2\sin t]_0^{2\pi} + \tfrac{1}{2}\left[t + \tfrac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{2\pi}\right) =$$

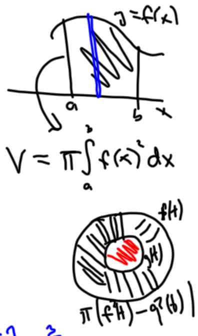
$$= R^2\left(2\pi + \tfrac{1}{2}\cdot 2\pi\right) = 3\pi R^2$$

11 21-17:55

Příklad 8. Vypočtěte objem tělesa vytvořeného rotací rovinného obrazce ohraničeného čarami $y = 1 - x^2$, $y = x^2$ kolem osy x.

$1 - x^2 = x^2$
$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$





$$V = \pi\int_a^b f(x)^2\,dx$$

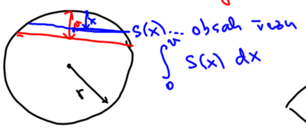
$\pi\left(f^2(t) - g^2(t)\right)$

$$V = \pi\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1-x^2)^2 - (x^2)^2 = \dots = \frac{1}{3}\cdot 2^{\frac{3}{2}}\cdot\pi$$

11 21-17:56

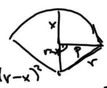
Příklad 9. Vypočtěte objem kulové úseče, je-li poloměr koule r a výška úseče v.

z def.



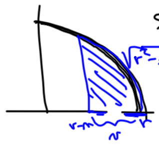
$S(x)$ … obsah řezu

$$\int_0^v S(x)\,dx$$



$\rho^2 = r^2 - (r-x)^2$

$S(x) = \pi\rho^2 = \pi(2rx - x^2)$



$$V = \pi\cdot\int_{r-v}^{r} r^2 - x^2\,dx =$$

$0 \le v \le r$

$$= \pi\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{r-v}^{r} =$$

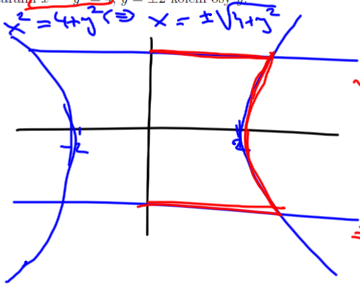
$$= \pi\left(\frac{2r^3}{3} - r^2(r-v) + \frac{(r-v)^3}{3}\right) = \pi\left(\cancel{\frac{2r^3}{3}} - \cancel{r^3} + \cancel{r^2v} +\right.$$

$$\left. + \cancel{\frac{r^3}{3}} - \cancel{r^2v} + rv^2 - \frac{v^3}{3}\right) = \frac{\pi v^2}{3}(3r - v)$$

11 21-17:56

Příklad 10. Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací rovinného obrazce ohraničeného čarami $\boxed{x^2 - y^2 = 4}$, $y = \pm 2$ kolem osy y.

$x^2 = 4 + y^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4+y^2}$



$x = f(y) = \sqrt{4+y^2}$

$$V = \pi\int_{-2}^{2} 4 + y^2\,dy =$$

$$= \pi\left[4y + \frac{y^3}{3}\right]_{-2}^{2} =$$

$$= \pi\left(16 + \frac{16}{3}\right) =$$

$$= \frac{64}{3}\pi$$

11 21-17:56

Příklad 11. Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací cykloidy kolem osy x (omezte se na část mezi dvěma hroty).

$0 \le x \le 2\pi$

$x = Rt - R\sin t$
$y = R - R\cos t$

$$V = \pi\int_0^{2\pi} y(t)^2\,\underset{x'(t)dt}{\underset{\parallel}{dx}} = \pi\int_0^{2\pi} R^2(1-\cos t)^2\cdot R(1-\cos t)\,dt$$

$$= \dots = 5\pi^2R^3$$

11 21-17:57

Příklad 12. Vypočtěte délku křivky $y = \ln x$ pro $x \in \langle a, b\rangle$.

$a, b > 0$

$$d = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$$

parametricky

$$d = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$$

$$d = \int_a^b \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\,dx = \int_a^b \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx$$

$$= \left|\begin{array}{l} \text{subst. } t = \sqrt{1+x^2} \\ dt = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\,dx = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \end{array}\right| = \dots$$

$$= \left[\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sqrt{1+x^2} + 1}\right]_a^b$$

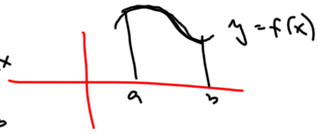
11 21-17:57

Příklad 13. Vypočtěte délku asteroidy.

11 21-17:57

Příklad 16. Vypočtěte obsah plochy vzniklé rotací jedné polovlny křivky $y = \sin x$ pro $x \in \langle 0, \pi \rangle$ kolem osy x.

$$S = \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$



$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$

$$S = \int_\alpha^\beta \underbrace{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}\,dt$$

11 21-17:58

11 21-19:43