Matematika II – 1. přednáška
Polynomiální interpolace

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

21. 9. 2011

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB102`, *e*-text.

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB102`, *e*-text.
- Ivana Horová, Jiří Zelinka – Numerické metody, MU Brno, 2. rozšířené vydání, 2004, 294 s., ISBN 80-210-3317-7.
- Zuzana Došlá, Jaromír Kuben – Diferenciální počet funkcí jedné proměnné, MU Brno, 2003, 215 s., ISBN 80-210-3121-2 (*rovněž na* `http://www.math.muni.cz/~dosla/download/skript.pdf`).

Plán přednášky

Touto kapitolou započneme budování nástrojů umožňujících modelování závislostí, které nejsou ani lineární ani diskrétní. S takovou potřebou se např. setkáme, kdykoliv popisujeme systém vyvíjející se v čase a to ne jen v několika vybraných okamžicích ale „souvisle“, tj. pro všechny možné okamžiky. Někdy je to přímo záměr či potřeba (třeba ve fyzikálních procesech), jindy je to vhodné přiblížení diskrétního modelu (třeba u ekonomických nebo populačních modelů).

Polynomy

Polynomem nad okruhem $\mathbb{R}$ rozumíme zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dané pro každé $x \in \mathbb{R}$ výrazem

$$x \mapsto f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$, jsou pevně zadaná čísla, tzv. **koeficienty**. Pokud je $a_n \neq 0$, říkáme, že polynom f je **stupně** n. Stupeň nulového polynomu není definován (někdy se klade roven $-\infty$).

Pro polynomy f stupně n a g stupně m, existují jednoznačně určené polynomy q a r takové, že stupeň r je menší než m nebo je $r = 0$ a $f = q \cdot g + r$. Je-li pro nějaký prvek $b \in \mathbb{R}$ hodnota $f(b) = 0$, pak to znamená, že v podílu $f(x) = q(x)(x - b) + r(x)$ musí být $r = 0$. Jinak by totiž nebylo možné dosáhnout $f(b) = q(b) \cdot 0 + r$, kde stupeň r je nulový. Říkáme, že b je *kořen polynomu* f. Stupeň q je pak právě $n - 1$. Pokud má q opět kořen, můžeme pokračovat a po nejvýše n krocích dojdeme ke konstatnímu polynomu. Dokázali jsme tedy, že každý nenulový polynom nad $\mathbb{R}$ má nejvýše tolik kořenů, kolik je jeho stupeň. Odtud již snadno dovodíme i následující pozorování.

Lemma

Dva polynomy f a g nad $\mathbb{R}$ jsou si rovny jako zobrazení, právě když mají shodné koeficienty.

Lemma

Dva polynomy f a g nad $\mathbb{R}$ jsou si rovny jako zobrazení, právě když mají shodné koeficienty.

Uvědomme si, že pro (obecněji definované) polynomy nad konečnými okruhy samozřejmě takové tvrzení neplatí. Uvažte např. polynom $x^2 + x$ nad $\mathbb{Z}_2$.

Lemma

Dva polynomy f a g nad $\mathbb{R}$ jsou si rovny jako zobrazení, právě když mají shodné koeficienty.

Uvědomme si, že pro (obecněji definované) polynomy nad konečnými okruhy samozřejmě takové tvrzení neplatí. Uvažte např. polynom $x^2 + x$ nad $\mathbb{Z}_2$.

Důkaz.

Předpokládejme $f = g$, tj. $f - g = 0$ jako zobrazení. Polynom $(f - g)(x)$ tedy má nekonečně mnoho kořenů, což je možné pouze tehdy, je-li nulovým polynomem. $\square$

Interpolační polynom

Častá praktická úloha zní

> *zadejte formuli pro funkci, pro kterou máme zadány hodnoty v předem daných daných bodech* $x_0, \dots, x_n$.

Interpolační polynom

Častá praktická úloha zní

> *zadejte formuli pro funkci, pro kterou máme zadány hodnoty v předem daných daných bodech $x_0, \dots, x_n$.*

Pokud by šlo o nulové hodnoty, umíme přímo zadat polynom

$$f(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n),$$

který bude mít nulové hodnoty právě v těchto bodech a nikde jinde.

Interpolační polynom

Častá praktická úloha zní

> *zadejte formuli pro funkci, pro kterou máme zadány hodnoty v předem daných daných bodech* $x_0, \dots, x_n$.

Pokud by šlo o nulové hodnoty, umíme přímo zadat polynom

$$f(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n),$$

který bude mít nulové hodnoty právě v těchto bodech a nikde jinde. To ale není jediná odpověď, protože požadovanou vlastnost má i nulový polynom. Ten je přitom jediný s touto vlastností ve vektorovém prostoru polynomů stupně nejvýše n. Ve skutečnosti, jak jsme dokázali před chvílí, *nenulový polynom stupně* n, *nemá nikdy více než* n *nulových bodů*.

Lagrangeův interpolační polynom

Věta

Pro každou množinu různých bodů $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ a předepsané hodnoty $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ existuje právě jeden polynom f stupně nejvýše n (případně nulový polynom), pro který platí

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

Lagrangeův interpolační polynom

Věta

Pro každou množinu různých bodů $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ a předepsané hodnoty $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ existuje právě jeden polynom f stupně nejvýše n (případně nulový polynom), pro který platí

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Důkaz.

Protože už víme, že existuje nejvýše jeden polynom stupně n s předepsanými $n+1$ hodnotami y_i v různých bodech $x_0, \ldots, x_n$, stačí sestrojit takový polynom. To ale není těžké, stačí pracovat s polynomy

$$\ell_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i}(x - x_j)}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)}.$$

Hledaný polynom je $f(x) = y_0\ell_0(x) + y_1\ell_1(x) + \cdots + y_n\ell_n(x)$. $\square$

Dosazením požadovaných hodnot do polynomu s neznámými koeficienty dostaneme systém $n+1$ rovnic pro stejný počet neznámých koeficientů a_i

$$\begin{aligned} a_0 + x_0 a_1 + \dots + (x_0)^n a_n &= y_0 \\ &\vdots \\ a_0 + x_n a_1 + \dots + (x_n)^n a_n &= y_n. \end{aligned}$$

Jak je dobře známo z lineární algebry, tento systém lineárních rovnic má právě jedno řešení pokud je determinant jeho matice invertibilní, tj. pokud je nenulový. V MB101 jsme dokázali, že pro tento tzv. **Vandermondův determinant** platí

$$V(x_0,\dots,x_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & (x_0)^2 & \dots & (x_0)^n \\ 1 & x_1 & (x_1)^2 & \dots & (x_1)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & (x_n)^2 & \dots & (x_n)^n \end{pmatrix} = \prod_{\substack{i,j=0,\dots,n \\ i>j}} (x_i - x_j),$$

a je tedy skutečně nenulový.

Problémy interpolace

Vyjádření tzv. **Lagrangeova interpolačního polynomu** je velmi citlivé na nepřesnosti výpočtu při malých rozdílech zadaných hodnot x_i, protože se zde těmito rozdíly dělí.

Problémy interpolace

Vyjádření tzv. **Lagrangeova interpolačního polynomu** je velmi citlivé na nepřesnosti výpočtu při malých rozdílech zadaných hodnot x_i, protože se zde těmito rozdíly dělí.
Přímé řešení soustav soustavy rovnic by vyžadovalo čas úměrný n^3, což je často neefektivní.

Problémy interpolace

Vyjádření tzv. **Lagrangeova interpolačního polynomu** je velmi citlivé na nepřesnosti výpočtu při malých rozdílech zadaných hodnot x_i, protože se zde těmito rozdíly dělí.
Přímé řešení soustav soustavy rovnic by vyžadovalo čas úměrný n^3, což je často neefektivní.
Ještě horším problémem je velice špatná stabilita hodnot reálných nebo racionálních polynomů při zvětšující se hodnotě proměnné x. Brzy budeme mít nástroje na přesný popis kvalitativního chování funkcí, nicméně i bez nich je zřejmé, že podle znaménka koeficientu u nejvyšší mocniny polynomu se hodnoty velice rychle při rostoucím x vydají buď do plus nebo do mínus nekonečna (jde tedy o dost nevhodný nástroj pro *extrapolaci*). Ani toto znaménko koeficientu u nejvyššího stupně se ale u interpolačního polynomu při malých změnách prokládaných hodnot nechová stabilně.

Plán přednášky

Hodnoty polynomů s rostoucí proměnnou rychle míří k nekonečným hodnotám a navíc se uvnitř intervalu daného největší a nejmenší hodnotu z množiny $\{x_0, \dots, x_n\}$ mohou chovat dosti *divoce* . Mohlo by se ale zdát, že podstatně lepší výsledky budeme alespoň mezi body x_i dosahovat, když si budeme kromě hodnot funkce hlídat, jak rychle naše funkce v daných bodech rostou. Zavedeme proto (prozatím spíše intuitivně) pojem **derivace** pro polynomy.

Hodnoty polynomů s rostoucí proměnnou rychle míří k nekonečným hodnotám a navíc se uvnitř intervalu daného největší a nejmenší hodnotu z množiny $\{x_0, \dots, x_n\}$ mohou chovat dosti *divoce* . Mohlo by se ale zdát, že podstatně lepší výsledky budeme alespoň mezi body x_i dosahovat, když si budeme kromě hodnot funkce hlídat, jak rychle naše funkce v daných bodech rostou. Zavedeme proto (prozatím spíše intuitivně) pojem **derivace** pro polynomy. Rychlost růstu v bodě $x \in \mathbb{R}$ pro reálný polynom $f(x)$ dobře vyjadřují podíly

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

a protože umíme spočíst (dokonce nad libovolným okruhem)

$$(x + \Delta x)^k = x^k + kx^{k-1}\Delta x + \dots + \binom{k}{l} x^l (\Delta x)^{k-l} + \dots + (\Delta x)^k,$$

umíme i spočíst zmiňovaný podíl pro $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$.

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = a_n\frac{nx^{n-1}\Delta x+\cdots+(\Delta x)^n}{\Delta x}+\cdots+a_1\frac{\Delta x}{\Delta x}$$
$$= na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1+\Delta x(\dots),$$

kde výraz v závorce je polynomiálně závislý na Δx.

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = a_n \frac{n x^{n-1}\Delta x + \dots + (\Delta x)^n}{\Delta x} + \dots + a_1 \frac{\Delta x}{\Delta x}$$
$$= n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1 + \Delta x(\dots),$$

kde výraz v závorce je polynomiálně závislý na Δx.
Evidentně pro hodnoty Δx velice blízké nule dostaneme hodnotu libovolně blízkou výrazu

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1,$$

který nazýváme **derivace polynomu** $f(x)$ podle proměnné x.

Z definice je jasné, že $f'(x_0)$ dává dobré přiblížení pro chování $f(x)$ v okolí bodu x_0. Přesněji řečeno, přímka

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

velice dobře aproximuje přímky procházející body $[x_0, f(x_0)]$ a $[x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)]$ pro malé hodnoty Δx. Hovoříme o **lineárním přiblížení** polynomu f jeho **tečnou**.

Z definice je jasné, že $f'(x_0)$ dává dobré přiblížení pro chování $f(x)$ v okolí bodu x_0. Přesněji řečeno, přímka

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

velice dobře aproximuje přímky procházející body $[x_0, f(x_0)]$ a $[x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)]$ pro malé hodnoty Δx. Hovoříme o **lineárním přiblížení** polynomu f jeho **tečnou**.

Derivace polynomů je lineární zobrazení, které přiřazuje polynomům stupně nejvýše n polynomy stupně nejvýše $n - 1$. Iterací této operace dostáváme druhé derivace f'', třetí derivace $f^{(3)}$ a obecně po k–násobném opakování polynom $f^{(k)}$ stupně nejvýše $n - k$. Po $n + 1$ derivacích je výsledkem nulový polynom.

Hermiteův interpolační problém

Uvažme opět $m+1$ po dvou různých $x_0, \dots, x_m$ a předepišme hodnoty a derivace $y_i^{(k)}$ pro $k = 0$ a $k = 1$. Hledáme $f(x) = a_n x^n + \dots a_0$ s těmito hodnotami a derivacemi.

Hermiteův interpolační problém

Uvažme opět $m+1$ po dvou různých $x_0, \dots, x_m$ a předepišme hodnoty a derivace $y_i^{(k)}$ pro $k=0$ a $k=1$. Hledáme $f(x) = a_n x^n + \dots a_0$ s těmito hodnotami a derivacemi.
Opět obdržíme pro neznámé koeficienty a_i systém rovnic

$$\begin{aligned}
a_0 + x_0 a_1 + \dots + (x_0)^n a_n &= y_0 \\
&\vdots \\
a_0 + x_m a_1 + \dots + (x_m)^n a_n &= y_m \\
a_1 + 2x_0 a_2 + \dots + n(x_0)^{n-1} a_n &= y_0' \\
&\vdots \\
a_1 + 2x_m a_2 + \dots + n(x_m)^{n-1} a_n &= y_m'.
\end{aligned}$$

Při volbě $n = 2m+1$ bude determinant tohoto systému rovnic nenulový. Opět lze také zkonstruovat takový polynom f přímo (viz skripta). Nazýváme jej **Hermiteův interpolační polynom**.

Příklad

Nalezněte polynom P splňující následující podmínky:

$$P(1) = 0, \quad P'(1) = 1, \quad P(2) = 3, \quad P'(2) = 3.$$

Příklad

Nalezněte polynom P splňující následující podmínky:

$$P(1) = 0, \quad P'(1) = 1, \quad P(2) = 3, \quad P'(2) = 3.$$

Máme $m = 1$ a hledáme polynom stupně $n = 2m + 1 = 3$, tj. $P(x) = a_3\,x^3 + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$. Dosazením za $x = 1$ a $x = 2$ do výrazu pro $P(x)$ a $P'(x)$ dostaneme systém

$$\begin{aligned} P(1) &= a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0, \\ P(2) &= 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 3, \\ P'(1) &= 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 1, \\ P'(2) &= 12a_3 + 4a_2 + a_1 = 3. \end{aligned}$$

Vyřešením tohoto systému dostaneme $P(x) = -2x^3 + 10x^2 - 13x + 5$.

Úplně nejjednodušší případ je zadání hodnoty a derivace v jediném bodě. Tím určíme beze zbytku polynom stupně 1

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

tj. právě rovnici přímky zadané hodnotou a směrnicí v bodě x_0.

Úplně nejjednodušší případ je zadání hodnoty a derivace v jediném bodě. Tím určíme beze zbytku polynom stupně 1

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

tj. právě rovnici přímky zadané hodnotou a směrnicí v bodě x_0. Když zadáme hodnotu a derivaci ve dvou bodech, tj. $y_0 = f(x_0)$, $y_0' = f'(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_1' = f'(x_1)$ pro dva různé body x_i, dostaneme ještě pořád poměrně snadno řešitelný problém.

Ukažme si jej v zjednodušeném provedení, kdy $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Pak matice systému a její inverze budou

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Přímým vynásobením $A \cdot (y_0, y_1, y_0', y_1')^T$ pak vyjde vektor $(a_3, a_2, a_1, a_0)^T$ koeficientů polynomu f, tj.

$$f(x) = (2y_0 - 2y_1 + y_0' + y_1')x^3 + (-3y_0 + 3y_1 - 2y_0' - y_1')x^2 + y_0'x + y_0.$$

Ukažme si jej v zjednodušeném provedení, kdy $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Pak matice systému a její inverze budou

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Přímým vynásobením $A \cdot (y_0, y_1, y_0', y_1')^T$ pak vyjde vektor $(a_3, a_2, a_1, a_0)^T$ koeficientů polynomu f, tj.

$$f(x) = (2y_0 - 2y_1 + y_0' + y_1')x^3 + (-3y_0 + 3y_1 - 2y_0' - y_1')x^2 + y_0' x + y_0.$$

Formuli lze snadno upravit pro libovolné body x_0, x_1 a lze tak počítat aproximace funkcí *po kouskách*.

Ukažme si jej v zjednodušeném provedení, kdy $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Pak matice systému a její inverze budou

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Přímým vynásobením $A \cdot (y_0, y_1, y_0', y_1')^T$ pak vyjde vektor $(a_3, a_2, a_1, a_0)^T$ koeficientů polynomu f, tj.

$$f(x) = (2y_0 - 2y_1 + y_0' + y_1')x^3 + (-3y_0 + 3y_1 - 2y_0' - y_1')x^2 + y_0' x + y_0.$$

Formuli lze snadno upravit pro libovolné body x_0, x_1 a lze tak počítat aproximace funkcí *po kouskách*.
Obdobně lze předepisovat libovolný konečný počet derivací v jednotlivých bodech a vhodnou volbou stupně polynomu obdržíme vždy jednoznačné interpolace.

Plán přednášky

I u polynomiálních interpolací s derivacemi pořád zůstávají problémy zmíněné už v případě jednoduchých interpolací hodnot – složitost výpočtů a nestabilita. Navíc přibývá problém spojený s odhadem derivací pokud je zadána pouze množina hodnot. Použití derivací však podbízí jednoduché vylepšení metodiky – **splajny**.

I u polynomiálních interpolací s derivacemi pořád zůstávají problémy zmíněné už v případě jednoduchých interpolací hodnot – složitost výpočtů a nestabilita. Navíc přibývá problém spojený s odhadem derivací pokud je zadána pouze množina hodnot. Použití derivací však podbízí jednoduché vylepšení metodiky – **splajny**.

Nabízí se tedy využití malých polynomiálních kousků, které ale musíme umět rozumně navazovat.

I u polynomiálních interpolací s derivacemi pořád zůstávají problémy zmíněné už v případě jednoduchých interpolací hodnot – složitost výpočtů a nestabilita. Navíc přibývá problém spojený s odhadem derivací pokud je zadána pouze množina hodnot.
Použití derivací však podbízí jednoduché vylepšení metodiky – **splajny**.
Nabízí se tedy využití malých polynomiálních kousků, které ale musíme umět rozumně navazovat.
Nejjednodušší je propojení vždy dvou sousedních bodů lineárním polynomem. Tak se nejčastěji zobrazují data. Z pohledu derivací to znamená, že budou na jednotlivých úsecích konstantní a pak se skokem změní.

O něco sofistikovanější možností je předepsat v každém bodě hodnotu a derivaci, tj. pro dva body budeme mít 4 hodnoty a jednoznačně tím určíme Hermiteův polynom 3. stupně, viz výše. Tento polynom pak můžeme použít pro všechny hodnoty nezávislé proměnné mezi krajními hodnotami $x_0 < x_1$. Hovoříme o **intervalu** $[x_0, x_1]$. Takové polynomiální příblížení po kouskách už bude mít tu vlastnost, že derivace na sebe budou navazovat.

O něco sofistikovanější možností je předepsat v každém bodě hodnotu a derivaci, tj. pro dva body budeme mít 4 hodnoty a jednoznačně tím určíme Hermiteův polynom 3. stupně, viz výše. Tento polynom pak můžeme použít pro všechny hodnoty nezávislé proměnné mezi krajními hodnotami $x_0 < x_1$. Hovoříme o **intervalu** $[x_0, x_1]$. Takové polynomiální přiblížení po kouskách už bude mít tu vlastnost, že derivace na sebe budou navazovat.

V praxi ale není pouhé navazování první derivace dostatečné (viz třeba koleje tramvají) a navíc při naměřených datech nemíváme hodnoty derivací k dispozici. Přímo se proto vnucuje pokus využívat pouze zadané hodnoty ve dvou sousedních bodech, ale požadovat zároveň rovnost prvních i druhých derivací u sousedních kousků polynomů třetího stupně!

Kubický interpolační splajn

Definition

Nechť $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ jsou reálné (nebo racionální) hodnoty, ve kterých jsou zadány požadované hodnoty $y_0, \ldots, y_n$. **Kubickým interpolačním splajnem** pro toto zadání je funkce $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (nebot $S : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$), která splňuje následující podmínky:

- zúžení S na interval $[x_{i-1}, x_i]$ je polynom S_i třetího stupně, $i = 1, \ldots, n$
- $S_i(x_{i-1}) = y_{i-1}$ a $S_i(x_i) = y_i$ pro všechny $i = 1, \ldots n$,
- $S_i'(x_i) = S_{i+1}'(x_i)$ pro všechny $i = 1, \ldots, n-1$,
- $S_i''(x_i) = S_{i+1}''(x_i)$ pro všechny $i = 1, \ldots, n-1$.

Kubický splajn pro $n+1$ bodů sestává z n kubických polynomů, tj. máme k dispozici $4n$ volných parametrů (první definiční podmínka). Další podmínky přitom zadávají $2n+(n-1)+(n-1)$ rovností, tj. dva parametry zůstávají volné. Při praktickém použití se dodávají předpisy pro první derivace v krajních bodech (tzv. **úplný splajn**) nebo jsou druhé derivace zadány jako nula (tzv. **přirozený splajn**).

Kubický splajn pro $n+1$ bodů sestává z n kubických polynomů, tj. máme k dispozici $4n$ volných parametrů (první definiční podmínka). Další podmínky přitom zadávají $2n+(n-1)+(n-1)$ rovností, tj. dva parametry zůstávají volné. Při praktickém použití se dodávají předpisy pro první derivace v krajních bodech (tzv. **úplný splajn**) nebo jsou druhé derivace zadány jako nula (tzv. **přirozený splajn**). Výpočet celého splajnu už není bohužel tak jednoduchý jako u nezávislých výpočtů Hermiteových polynomů třetího stupně, protože data se prolínají vždy mezi sousedními intervaly. Výpočty splajnů jsou však základem takřka všech grafických balíčků pracujících s křivkami, proto je pochopení principu jejich fungování velmi důležité. Ti z vás, kteří tíhnou k počítačové grafice, se s tímto pojmem určitě ještě setkají (viz též B-spline, Bézierova křivka).

Plán přednášky

Aproximace je narozdíl od interpolace postup, který bere ohled na to, že pracujeme s potenciálně nepřesnými vstupními daty, a nesnaží se proto *trefit* přesně do zadaných bodů, ale výstupem je funkce, která má ze zadané třídy funkcí (ve vhodném smyslu) nejmenší vzdálenost od zadaných bodů. Častým případem je rovněž situace, kdy řešíme tzv. **přeurčenou soustavu rovnic**, tj. máme více rovnic než neznámých (např. z výše uvedených důvodů nechceme aproximovat $n+1$ daných bodů hodnotami polynomu stupně n ale stupně nižšího).

Metoda nejmenších čtverců

Metoda nejmenších čtverců je založena na tom, že hledáme funkci z dané množiny (např. lineární polynomy, kvadratické polynomy, polynomy stupně nejvýše n, ale i mnohé jiné funkce v závislosti na zvoleném modelu), jejíž hodnoty v daných bodech $x_1, \ldots, x_n$ mají nejmenší **součet druhých mocnin vzdáleností** od zadaných hodnot $y_1, \ldots, y_n$.

Metoda nejmenších čtverců

Metoda nejmenších čtverců je založena na tom, že hledáme funkci z dané množiny (např. lineární polynomy, kvadratické polynomy, polynomy stupně nejvýše n, ale i mnohé jiné funkce v závislosti na zvoleném modelu), jejíž hodnoty v daných bodech $x_1, \ldots, x_n$ mají nejmenší **součet druhých mocnin vzdáleností** od zadaných hodnot $y_1, \ldots, y_n$.

Tato metoda se velmi často objevuje ve zejména ve statistice (regresní analýza).

Ukažme si použití této metody v nejjednodušším případě, kdy máme dáno n bodů $([x_1, y_1], \ldots, [x_n, y_n])$ a hledáme přímku, která nejlépe *vystihuje* rozložení těchto bodů.

Hledáme tedy funkci tvaru $f(x) = a \cdot x + b$ s neznámými $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby hodnota

$$\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2$$

byla minimální.

Hledáme tedy funkci tvaru $f(x) = a \cdot x + b$ s neznámými $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby hodnota

$$\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2$$

byla minimální.
S pomocí odhadů nebo základních metod diferenciálního počtu (toho budeme schopni za několik týdnů) lze snadno odvodit následující tvrzení.

Věta

Mezi přímkami tvaru $f(x) = a \cdot x + b$ má nejmenší součet čtverců vzdáleností funkčních hodnot v bodech $x_1, \ldots, x_n$ od hodnot y_i funkce splňující

$$a \sum x_i^2 + b \sum x_i = \sum x_i y_i$$
$$a \sum x_i + b \cdot n = \sum y_i$$

Příklad

Metodou nejmenších čtverců určete regresní přímku odpovídající naměřeným datům:

x	1	2	3	4
y	1.5	1.6	2.1	3.0

Příklad

Metodou nejmenších čtverců určete regresní přímku odpovídající naměřeným datům:

x	1	2	3	4
y	1.5	1.6	2.1	3.0

Řešení

Data je vhodné seřadit v tabulce podle schématu:

x	y	xy	x^2
1	1.5	1.5	1
2	1.6	3.2	4
3	2.1	6.3	9
4	3	12	16
10	8.2	23	30

Příklad

Metodou nejmenších čtverců určete regresní přímku odpovídající naměřeným datům:

x	1	2	3	4
y	1.5	1.6	2.1	3.0

Řešení

Data je vhodné seřadit v tabulce podle schématu:

x	y	xy	x^2
1	1.5	1.5	1
2	1.6	3.2	4
3	2.1	6.3	9
4	3	12	16
10	8.2	23	30

Dostáváme rovnice $30a + 10b = 23, 10a + 4b = 8{,}2$, odkud $a = 0{,}5$, $b = 0{,}8$.

Plán přednášky

Reálná čísla

Reálná čísla zavedeme v podstatě intuitivně jako obrazy bodů na přímce, kde vyznačíme bod 0 označující počátek a rozhodneme o kladném směru (doprava). Značíme $\mathbb{R}$. Matematicky lze reálná čísla zavést pomocí axiomů.

Reálná čísla

Reálná čísla zavedeme v podstatě intuitivně jako obrazy bodů na přímce, kde vyznačíme bod 0 označující počátek a rozhodneme o kladném směru (doprava). Značíme $\mathbb{R}$. Matematicky lze reálná čísla zavést pomocí axiomů.
Připomeňme si nyní vlastnosti (axiomy) reálných čísel včetně souvislostí uspořádání a ostatních relací. Dělící čáry v tabulce naznačují, jak axiomy postupně zaručují, že jsou reálná čísla komutativní grupou vůči sčítání, že $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ je komutativní grupa vůči násobení, $\mathbb{R}$ je pole, množina $\mathbb{R}$ spolu s operacemi $+$, $\cdot$ a s relací uspořádání je tzv. **uspořádané těleso (pole)** a konečně poslednímu axiomu můžeme rozumět tak, že $\mathbb{R}$ je *dostatečně husté*, tj. nechybí nám tam body, jako např. druhá odmocnina ze dvou v číslech racionálních.

(R1)	$(a+b)+c = a+(b+c)$, pro všechny a, b, $c \in \mathbb{R}$
(R2)	$a+b = b+a$, pro všechny a, $b \in \mathbb{R}$
(R3)	existuje $0 \in \mathbb{R}$ takový, že pro všechny $a \in \mathbb{R}$ platí $a+0 = a$
(R4)	pro všechny $a \in \mathbb{R}$ existuje opačný prvek $(-a) \in \mathbb{R}$ takový, že platí $a+(-a) = 0$
(R5)	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, pro všechny a, b, $c \in \mathbb{R}$
(R6)	$a \cdot b = b \cdot a$ pro všechny a, $b \in \mathbb{R}$
(R7)	existuje $1 \in \mathbb{R}$ takový, že pro všechny $a \in \mathbb{R}$ platí $1 \cdot a = a$
(R8)	pro každý $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ existuje inverzní prvek $a^{-1} \in \mathbb{R}$ takový, že platí $a \cdot a^{-1} = 1$
(R9)	$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$, pro všechny a, b, $c \in \mathbb{R}$
(R10)	relace $\leq$ je úplné uspořádání, tj. reflexivní, antisymetrická, tranzitivní a úplná relace na $\mathbb{R}$
(R11)	pro $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí, že z $a \leq b$ vyplývá $a+c \leq b+c$
(R12)	pro všechny $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$, platí také $a \cdot b > 0$
(R13)	každá neprázdná ohraničená množina $A \subset \mathbb{R}$ má supremum.

Horní a dolní závory, suprema a infima

Pojem suprema má smysl pro každou uspořádanou množinu, my se zde omezíme na reálná čísla.

Horní a dolní závory, suprema a infima

Pojem suprema má smysl pro každou uspořádanou množinu, my se zde omezíme na reálná čísla.
Nechť je dána neprázdná množina $A \subseteq \mathbb{R}$. Prvek $b \in \mathbb{R}$ nazveme

$$\textit{horní závorou } \text{množiny } A, \text{ pokud } \forall x \in A : \; x \leq b,$$

tj. pokud je prvek b větší (nebo roven) než všechny prvky v množině A. Obdobně se definuje *dolní závora* množiny A, tj. je to prvek $a \in \mathbb{R}$ s vlastností, že $a \leq x$ pro všechny $x \in A$.

Horní a dolní závory, suprema a infima

Pojem suprema má smysl pro každou uspořádanou množinu, my se zde omezíme na reálná čísla.
Nechť je dána neprázdná množina $A \subseteq \mathbb{R}$. Prvek $b \in \mathbb{R}$ nazveme

$$\textit{horní závorou } \text{množiny } A, \text{ pokud } \forall\, x \in A: \;\; x \le b,$$

tj. pokud je prvek b větší (nebo roven) než všechny prvky v množině A. Obdobně se definuje *dolní závora* množiny A, tj. je to prvek $a \in \mathbb{R}$ s vlastností, že $a \le x$ pro všechny $x \in A$.
Řekneme, že množina A je *shora ohraničená* (shora omezená), pokud má A alespoň jednu horní závoru. Podobně se definuje *zdola ohraničená* (zdola omezená) množina A. Množina A je *ohraničená* (omezená), pokud je A současně zdola i shora ohraničená. Viz příklady reálných intervalů.

Horní a dolní závory, suprema a infima

Pojem suprema má smysl pro každou uspořádanou množinu, my se zde omezíme na reálná čísla.
Nechť je dána neprázdná množina $A \subseteq \mathbb{R}$. Prvek $b \in \mathbb{R}$ nazveme

$$\textit{horní závorou } \text{množiny } A, \text{ pokud } \forall x \in A: \; x \leq b,$$

tj. pokud je prvek b větší (nebo roven) než všechny prvky v množině A. Obdobně se definuje *dolní závora* množiny A, tj. je to prvek $a \in \mathbb{R}$ s vlastností, že $a \leq x$ pro všechny $x \in A$.
Řekneme, že množina A je *shora ohraničená* (shora omezená), pokud má A alespoň jednu horní závoru. Podobně se definuje *zdola ohraničená* (zdola omezená) množina A. Množina A je *ohraničená* (omezená), pokud je A současně zdola i shora ohraničená. Viz příklady reálných intervalů.
Nejmenší horní závora množiny A se nazývá *supremum* množiny A.

Tj. prvek $b \in \mathbb{R}$ je *supremum* množiny A, pokud jsou splněny následující dvě podmínky:

- $\forall\, x \in A : \; x \leq b$ (tj. b je horní závora množiny A),
- je-li $y \in \mathbb{R}$ horní závora množiny A, potom je $b \leq y$ (tj. b je nejmenší horní závora).

Supremum množiny A značíme jako $b = \sup A$.

Obdobně se definuje *infimum* množiny A, neboli je to největší dolní závora množiny A, značíme $a = \inf A$.

Tj. prvek $b \in \mathbb{R}$ je *supremum* množiny A, pokud jsou splněny následující dvě podmínky:

- $\forall\, x \in A: \;\; x \leq b$ (tj. b je horní závora množiny A),
- je-li $y \in \mathbb{R}$ horní závora množiny A, potom je $b \leq y$ (tj. b je nejmenší horní závora).

Supremum množiny A značíme jako $b = \sup A$.

Obdobně se definuje *infimum* množiny A, neboli je to největší dolní závora množiny A, značíme $a = \inf A$.

Příklad

Je-li A libovolný z intervalů $(0,1)$, $[0,1]$, $[0,1)$ nebo $(0,1]$, potom je vždy

$$\sup A = 1 \quad \text{a} \quad \inf A = 0.$$

Má-li množina A největší (resp. nejmenší) prvek b, potom je $b = \sup A$ (resp. $b = \inf A$).

Tj. prvek $b \in \mathbb{R}$ je *supremum* množiny A, pokud jsou splněny následující dvě podmínky:

- $\forall\, x \in A: \;\; x \leq b$ (tj. b je horní závora množiny A),
- je-li $y \in \mathbb{R}$ horní závora množiny A, potom je $b \leq y$ (tj. b je nejmenší horní závora).

Supremum množiny A značíme jako $b = \sup A$.

Obdobně se definuje *infimum* množiny A, neboli je to největší dolní závora množiny A, značíme $a = \inf A$.

Příklad

Je-li A libovolný z intervalů $(0, 1)$, $[0, 1]$, $[0, 1)$ nebo $(0, 1]$, potom je vždy

$$\sup A = 1 \quad \text{a} \quad \inf A = 0.$$

Má-li množina A největší (resp. nejmenší) prvek b, potom je $b = \sup A$ (resp. $b = \inf A$). Zatímco největší či nejmenší prvek nemusí v A existovat, i když je množina A ohraničená, supremum a infimum existují (v ohraničeném případě) vždy (jak je vidět z výše uvedeného axiomu R13).