Matematika II – 10. přednáška
Nekonečné řady funkcí

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

30. 11. 2011

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB102`, *e*-text.

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB102`, *e*-text.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka – **Nekonečné řady s programem Maple**, CD, *e*-text a videozáznamy, `http://www.math.muni.cz/~plch/nkpm`.

Plán přednášky

1. Posloupnosti a řady funkcí
2. Mocninné řady
3. Taylorovy a Maclaurinovy řady
4. Aplikace nekonečných řad

Posloupnosti a řady funkcí

V matematice hrají důležitou roli řady, jejichž členy jsou funkce $f_n(x)$. V takovém případě hovoříme o řadách funkcí, jejichž součtem je funkce $f(x)$.

Posloupnosti a řady funkcí

V matematice hrají důležitou roli řady, jejichž členy jsou funkce $f_n(x)$. V takovém případě hovoříme o řadách funkcí, jejichž součtem je funkce $f(x)$.

Přirozené dotazy jsou:

- Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ spojité v nějakém bodě $x_0 \in [a, b]$, je spojitá i funkce $f(x)$ v bodě x_0?

Posloupnosti a řady funkcí

V matematice hrají důležitou roli řady, jejichž členy jsou funkce $f_n(x)$. V takovém případě hovoříme o řadách funkcí, jejichž součtem je funkce $f(x)$.

Přirozené dotazy jsou:

- Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ spojité v nějakém bodě $x_0 \in [a, b]$, je spojitá i funkce $f(x)$ v bodě x_0?
- Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ diferencovatelné v $a \in [a, b]$, je v něm diferencovatelná i funkce $f(x)$ a platí vztah $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$?

Posloupnosti a řady funkcí

V matematice hrají důležitou roli řady, jejichž členy jsou funkce $f_n(x)$. V takovém případě hovoříme o řadách funkcí, jejichž součtem je funkce $f(x)$.
Přirozené dotazy jsou:

- Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ spojité v nějakém bodě $x_0 \in [a, b]$, je spojitá i funkce $f(x)$ v bodě x_0?
- Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ diferencovatelné v $a \in [a, b]$, je v něm diferencovatelná i funkce $f(x)$ a platí vztah $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$?
- Jsou-li všechny funkce $f_n(x)$ integrovatelné na intervalu $[a, b]$, je integrovatelná i funkce $f(x)$ a platí vztah $\int f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n(x)dx$?

Ukážeme si na příkladech, že odpovědi na všechny tři takto kladené otázky jsou *NE!* Později uvedeme jednoduché dodatečné podmínky na konvergenci řady, které naopak platnosti všech tří tvrzení zajistí. Řady funkcí tedy obecně moc zvladatelné nejsou, nicméně si umíme vybrat docela velkou třídu funkcí takových, se kterými se už pracuje velmi dobře. Mezi ně budou patřit *mocninné řady*.

Ukážeme si na příkladech, že odpovědi na všechny tři takto kladené otázky jsou *NE!* Později uvedeme jednoduché dodatečné podmínky na konvergenci řady, které naopak platnosti všech tří tvrzení zajistí. Řady funkcí tedy obecně moc zvladatelné nejsou, nicméně si umíme vybrat docela velkou třídu funkcí takových, se kterými se už pracuje velmi dobře. Mezi ně budou patřit *mocninné řady*.

Příklad

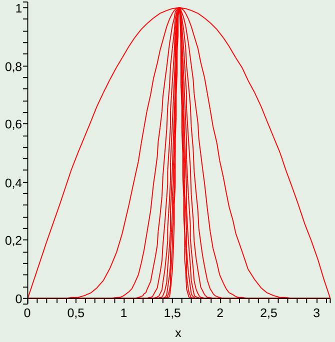
Uvažme funkce $f_n(x) = (\sin x)^n$ na intervalu $[0, \pi]$. Hodnoty těchto funkcí budou ve všech bodech $0 \le x \le \pi$ nezáporné a menší než jedna, kromě $x = \frac{\pi}{2}$, kde je hodnota 1. Proto

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro všechna } x \neq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{pro } x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Zjevně tedy je limita posloupnosti funkcí f_n nespojitou funkcí.

Příklad ((ne)spojitost řady funkcí)

Tentýž jev umíme najít i pro řady funkcí, protože součet je limitou částečných součtů. Stačí tedy v předchozím příkladě vyjádřit f_n jako n-tý částečný součet. Např. $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = (\sin x)^2 - \sin x$, atd. Obrázek vykresluje funkce $f_{n^3}(x)$ pro $n = 1, \ldots, 10$.

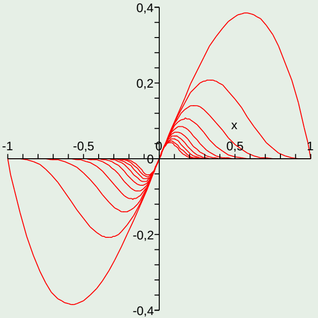


Příklad ((ne)diferencovatelnost řady funkcí)

Obrázek vykresluje $f_n(x) = x(1-x^2)^n$ na intervalu $[-1, 1]$ pro hodnoty $n = m^2$, $m = 1, \ldots, 10$.

Na první pohled je zjevné, že $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, všechny funkce $f_n(x)$ jsou hladké, ale v bodě $x = 0$ je jejich derivace $f_n'(0) = (1-x^2)^n - 2nx^2(1-x^2)^{n-1}|_{x=0} = 1$ nezávisle na n.

Limitní funkce pro posloupnost f_n přitom má samozřejmě všude derivaci nulovou!



Příklad ((ne)integrovatelnost řady funkcí)

Protipříklad k třetímu tvrzení jsme už viděli. Charakteristickou funkci $\chi_{\mathbb{Q}}$ racionálních čísel můžeme vyjádřit jakou součet spočetně mnoha funkcí, které budou očíslovány právě racionálními čísly a budou vždy všude nulové, kromě množiny bodů, podle které jsou pojmenovány, kde jsou rovny 1. Riemannovy integrály všech takových funkcí budou nulové, jejich součet ale není Riemannovsky inegrovatelnou funkcí.

Stejnoměrná konvergence

Důvodem neúspěchu ve všech příkladech byla různá *rychlost* bodové konvergence v jednotlivých $x \in \mathbb{R}$. Zmíněnou dodatečnou podmínkou pak bude silnější pojem konvergence.

Definice

Říkáme, že posloupnost funkcí $f_n(x)$ *konverguje stejnoměrně* na intervalu $[a, b]$ k limitě $f(x)$, jestliže pro každé kladné (malé) číslo ε existuje (velké) přirozené číslo $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq N$ a všechna $x \in [a, b]$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Řada funkcí konverguje stejnoměrně na intervalu, jestliže stejnoměrně konverguje posloupnost jejích částečných součtů.

Stejnoměrná konvergence

Důvodem neúspěchu ve všech příkladech byla různá *rychlost* bodové konvergence v jednotlivých $x \in \mathbb{R}$. Zmíněnou dodatečnou podmínkou pak bude silnější pojem konvergence.

Definice

Říkáme, že posloupnost funkcí $f_n(x)$ *konverguje stejnoměrně* na intervalu $[a, b]$ k limitě $f(x)$, jestliže pro každé kladné (malé) číslo ε existuje (velké) přirozené číslo $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq N$ a všechna $x \in [a, b]$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Řada funkcí konverguje stejnoměrně na intervalu, jestliže stejnoměrně konverguje posloupnost jejích částečných součtů.

Graficky si definici můžeme představit tak, že do pásu vzniklého posunutím limitní funkce $f(x)$ na $f(x) \pm \epsilon$ pro libovolně malé, ale pevně zvolené kladné ϵ, vždy padnou *skoro* všechny funkce $f_n(x)$.

Následující tři věty lze stručně shrnout tvrzením, že všechna tři obecně neplatná tvrzení platí pro stejnoměrnou konvergenci (pozor ale na jemnosti u derivování).

Věta

Nechť $f_n(x)$ *je posloupnost funkcí spojitých na intervalu* $[a, b]$*, která na tomto intervalu stejnoměrně konverguje k funkci* $f(x)$*. Pak je také* $f(x)$ *spojitá funkce na intervalu* $[a, b]$*.*

Následující tři věty lze stručně shrnout tvrzením, že všechna tři obecně neplatná tvrzení platí pro stejnoměrnou konvergenci (pozor ale na jemnosti u derivování).

Věta

Nechť $f_n(x)$ je posloupnost funkcí spojitých na intervalu $[a, b]$, která na tomto intervalu stejnoměrně konverguje k funkci $f(x)$. Pak je také $f(x)$ spojitá funkce na intervalu $[a, b]$.

Důkaz.

Chceme ukázat, že pro libovolný pevný bod $x_0 \in [a, b]$ a jakékoliv pevně zvolené malé $\epsilon > 0$ bude $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ pro všechna x dostatečně blízká k x_0. Z definice stejnoměrné spojitosti pro naše $\epsilon > 0$ je $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ pro všechna $x \in [a, b]$ a všechna dostatečně velká n.

Následující tři věty lze stručně shrnout tvrzením, že všechna tři obecně neplatná tvrzení platí pro stejnoměrnou konvergenci (pozor ale na jemnosti u derivování).

Věta

Nechť $f_n(x)$ je posloupnost funkcí spojitých na intervalu $[a, b]$, která na tomto intervalu stejnoměrně konverguje k funkci $f(x)$. Pak je také $f(x)$ spojitá funkce na intervalu $[a, b]$.

Důkaz.

Chceme ukázat, že pro libovolný pevný bod $x_0 \in [a, b]$ a jakékoliv pevně zvolené malé $\epsilon > 0$ bude $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ pro všechna x dostatečně blízká k x_0. Z definice stejnoměrné spojitosti pro naše $\epsilon > 0$ je $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ pro všechna $x \in [a, b]$ a všechna dostatečně velká n. Zvolme si tedy nějaké takové n a uvažme $\delta > 0$ tak, aby $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \epsilon$ pro všechna x z δ-okolí x_0 (to je možné, protože všechny $f_n(x)$ jsou spojité). Pak

$$|f(x)-f(x_0)| < |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)| < 3\epsilon$$

pro všechna x z námi zvoleného δ-okolí bodu x_0. $\square$

Věta (R-integrovatelnost limity stejnoměrně konvergentních funkcí)

Nechť $f_n(x)$ je posloupnost Riemannovsky integrovatelných funkcí na konečném intervalu $[a, b]$, které stejnoměrně konvergují k funkci $f(x)$. Pak také $f(x)$ je integrovatelná a platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Věta (R-integrovatelnost limity stejnoměrně konvergentních funkcí)

Nechť $f_n(x)$ je posloupnost Riemannovsky integrovatelných funkcí na konečném intervalu $[a, b]$, které stejnoměrně konvergují k funkci $f(x)$. Pak také $f(x)$ je integrovatelná a platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b (\lim_{n\to\infty} f_n(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Pro příslušný výsledek o derivacích je třeba zvýšené pozornosti ohledně předpokladů:

Věta (diferencovatelnost limity stejnoměrně konvergentních funkcí)

Nechť $f_n(x)$ je posloupnost funkcí diferencovatelných na intervalu $[a, b]$, která na tomto intervalu stejnoměrně konverguje k funkci $f(x)$. Dále nechť jsou všechny derivace $g_n(x) = f_n'(x)$ spojité a nechť konvergují na témže intervalu stejnoměrně k funkci $g(x)$. Pak je také funkce $f(x)$ diferencovatelná na intervalu $[a, b]$ a platí zde $f'(x) = g(x)$.

Test pro stejnoměrnou konvergenci

Nejjednodušším způsobem pro zjištění stejnoměrné konvergence funkcí je porovnání s absolutní konvergencí vhodné posloupnosti. Říkává se tomu často *Weierstrassův test*.

Weierstrassův test

Předpokládejme, že máme řadu funkcí $f_n(x)$ na intervalu $I = [a, b]$ a že navíc známe odhad

$$|f_n(x)| \leq a_n \in \mathbb{R}$$

pro vhodné nezáporné konstanty a_n a všechna $x \in [a, b]$. Pokud je (číselná) řada konstant $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak bude řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *konvergentní stejnoměrně*

Test pro stejnoměrnou konvergenci

Nejjednodušším způsobem pro zjištění stejnoměrné konvergence funkcí je porovnání s absolutní konvergencí vhodné posloupnosti. Říkává se tomu často *Weierstrassův test*.

Weierstrassův test

Předpokládejme, že máme řadu funkcí $f_n(x)$ na intervalu $I = [a, b]$ a že navíc známe odhad

$$|f_n(x)| \leq a_n \in \mathbb{R}$$

pro vhodné nezáporné konstanty a_n a všechna $x \in [a, b]$.
Pokud je (číselná) řada konstant $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak bude řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *konvergentní stejnoměrně*

Příklad

Rozhodněte, je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ stejnoměrně konvergentní na $\mathbb{R}$.

Plán přednášky

Mocninné řady

V části věnované diferenciálnímu počtu jsme ukázali, jak k dané funkci $f(x)$ přiřadit Taylorův polynom stupně n (se středem v daném bodě x_0), který aproximuje funkci $f(x)$ v okolí bodu x_0.

Definice

Mocninná řada se středem v bodě $x_0 = 0$ je nekonečná řada tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

Podobně, nekonečná řada tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + a_3 (x - x_0)^3 + \dots$$

se nazývá *mocninná řada se středem v bodě* x_0.

Mocninné řady

V části věnované diferenciálnímu počtu jsme ukázali, jak k dané funkci $f(x)$ přiřadit Taylorův polynom stupně n (se středem v daném bodě x_0), který aproximuje funkci $f(x)$ v okolí bodu x_0.

Definice

Mocninná řada se středem v bodě $x_0 = 0$ je nekonečná řada tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 + \dots$$

Podobně, nekonečná řada tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, (x - x_0)^n = a_0 + a_1\, (x - x_0) + a_2\, (x - x_0)^2 + a_3\, (x - x_0)^3 + \dots$$

se nazývá *mocninná řada se středem v bodě* x_0.
Bod x_0 se nazývá *střed mocninné řady* a čísla a_k její *koeficienty*.

Příklad (geometrická řada)

Pokud vezmeme všechny koeficienty $a_n = 1$ a $x_0 = 0$, dostaneme mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots .$$

Tato řada je geometrická s počátečním členem $a = 1$ a kvocientem $q = x$ a a konverguje pro $|x| < 1$, přičemž její součet je $\frac{1}{1-x}$.

Příklad (geometrická řada)

Pokud vezmeme všechny koeficienty $a_n = 1$ a $x_0 = 0$, dostaneme mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots .$$

Tato řada je geometrická s počátečním členem $a = 1$ a kvocientem $q = x$ a a konverguje pro $|x| < 1$, přičemž její součet je $\frac{1}{1-x}$.

Příklad

Mocninná řada s $a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$ a středem $x_0 = 2$, která je také geometrická s počátečním členem $a = 1$ a kvocientem $q = -\frac{x-2}{2}$. Ta podle tvrzení o konvergenci geometrické řady tato řada konverguje pro $\left|\frac{x-2}{2}\right| < 1$, tj. pro $x \in (0, 4)$, přičemž její součet je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (x-2)^n = \frac{1}{1 - \left(-\frac{x-2}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{2+x-2}{2}} = \frac{2}{x} \qquad \text{pro } x \in (0, 4).$$

Při studiu konvergence mocninných řad budeme používat kritéria konvergence číselných řad s nezápornými členy, která aplikujeme na příslušnou řadu absolutních hodnot. Zřejmě takto získáme informaci o *absolutní konvergenci* dané mocninné řady.

Příklad

Určete, pro které hodnoty x konverguje mocninná řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$.

Při studiu konvergence mocninných řad budeme používat kritéria konvergence číselných řad s nezápornými členy, která aplikujeme na příslušnou řadu absolutních hodnot. Zřejmě takto získáme informaci o *absolutní konvergenci* dané mocninné řady.

Příklad

Určete, pro které hodnoty x konverguje mocninná řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$.

Řešení

Podle podílového kritéria je

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{\frac{1}{n+1} x^{n+1}}{\frac{1}{n} x^n} \right| = \frac{n}{n+1} |x| \to |x| \qquad \text{pro } n \to \infty.$$

A tedy pro $|x| < 1$ tato řada konverguje (absolutně) a pro $|x| > 1$ nekonverguje (zřejmě pro $x < -1$ diverguje k $-\infty$ a pro $x > 1$ osciluje).

Při studiu konvergence mocninných řad budeme používat kritéria konvergence číselných řad s nezápornými členy, která aplikujeme na příslušnou řadu absolutních hodnot. Zřejmě takto získáme informaci o *absolutní konvergenci* dané mocninné řady.

Příklad

Určete, pro které hodnoty x konverguje mocninná řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$.

Řešení

Podle podílového kritéria je

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{\frac{1}{n+1}x^{n+1}}{\frac{1}{n}x^n}\right| = \frac{n}{n+1}|x| \to |x| \qquad \text{pro } n \to \infty.$$

A tedy pro $|x| < 1$ tato řada konverguje (absolutně) a pro $|x| > 1$ nekonverguje (zřejmě pro $x < -1$ diverguje k $-\infty$ a pro $x > 1$ osciluje). Pro $x = -1$ se jedná o zápornou harmonickou řadu která diverguje k $-\infty$. A pro $x = 1$ se jedná o alternující harmonickou řadu, která konverguje (relativně).

Příklad

Určete, pro které hodnoty x konverguje mocninná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \dots .$$

Příklad

Určete, pro které hodnoty x konverguje mocninná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \dots .$$

Řešení

Podle podílového kritéria je pro $n \to \infty$

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}\, x^{n+1}}{\frac{1}{n!}\, x^n} \right| = \frac{n!}{(n+1)!} \, |x| = \frac{1}{n+1} \, |x| \to 0.$$

A tedy tato řada konverguje (absolutně) a pro každé $x \in \mathbb{R}$.
Později ukážeme, že součet této mocninné řady je funkce e^x.

Každá mocninná řada konverguje ve svém středu, protože pro $x = x_0$ se jedná o nulovou řadu. Dále ze srovnávacího kritéria plyne následující.

Věta

Uvažujme mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + a_3 (x - x_0)^3 + \dots.$$

1. *Jestliže tato mocninná řada konverguje pro nějaké $x = c$, potom konverguje absolutně pro všechna $|x| < |c|$. Z Weiestrassova kritéria pak plyne dokonce stejnoměrná konvergence na každém uzavřeném intervalu $[a, b] \subseteq (-c, c)$.*
2. *Jestliže tato řada nekonverguje (tj. diverguje k $\pm\infty$ nebo osciluje) pro nějaké $x = d$, potom nekonverguje pro všechna $|x| > |d|$.*

Poloměr konvergence

Pro každou mocninnou řadu tedy nastává právě jedna z následujících možností:

- Existuje číslo $R > 0$ takové, že tato mocninná řada *konverguje absolutně* pro $|x - x_0| < R$, tj. pro $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ a nekonverguje pro $|x - x_0| > R$, tj. pro $x < x_0 - R$ a pro $x > x_0 + R$. Řada může a nemusí konvergovat v každém z krajních bodů $x = x_0 - R$ a $x = x_0 + R$.
- Tato mocninná řada konverguje absolutně pro všechna $x \in \mathbb{R}$ (v tomto případě klademe $R := \infty$).
- Tato mocninná řada konverguje pouze pro $x = x_0$ a nekonverguje pro všechna $x \neq 0$ (v tomto případě $R := 0$).

Poloměr konvergence

Pro každou mocninnou řadu tedy nastává právě jedna z následujících možností:

- Existuje číslo $R > 0$ takové, že tato mocninná řada *konverguje absolutně* pro $|x - x_0| < R$, tj. pro $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ a nekonverguje pro $|x - x_0| > R$, tj. pro $x < x_0 - R$ a pro $x > x_0 + R$. Řada může a nemusí konvergovat v každém z krajních bodů $x = x_0 - R$ a $x = x_0 + R$.
- Tato mocninná řada konverguje absolutně pro všechna $x \in \mathbb{R}$ (v tomto případě klademe $R := \infty$).
- Tato mocninná řada konverguje pouze pro $x = x_0$ a nekonverguje pro všechna $x \neq 0$ (v tomto případě $R := 0$).

Číslo R mající výše popsané vlastnosti nazýváme *poloměr konvergence* mocninné řady. Pokud je $R > 0$ (tj. pokud nastane první nebo druhá z výše uvedených možností), potom hovoříme o *intervalu konvergence*.

Příklad

- Pro mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ je poloměr konvergence $R = 1$.

Příklad

- Pro mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ je poloměr konvergence $R = 1$.
- Pro mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ je poloměr konvergence $R = \infty$.

Příklad

- Pro mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ je poloměr konvergence $R = 1$.
- Pro mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ je poloměr konvergence $R = \infty$.
- Pro mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$ je poloměr konvergence $R = 0$.

Pro poloměr konvergence R mocninné řady platí následující.

Věta

Pokud existuje limita (vlastní nebo nevlastní)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a, \qquad \textit{případně} \qquad \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = a,$$

potom poloměr konvergence mocninné řady je

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{a}, & \textit{pro } a > 0, \\ \infty, & \textit{pro } a = 0, \\ 0, & \textit{pro } a = \infty. \end{cases}$$

Důkaz.

Vztah pro poloměr konvergence R plyne z podílového kritéria resp. z odmocninového kritéria. Pokud totiž existuje příslušná limita z věty, potom je

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \sqrt[n]{|a_n\,(x - x_0)^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}\,.\,\sqrt[n]{|x - x_0|^n} = \sqrt[n]{|a_n|}\,.\,|x - x_0|$$
$$\to a\,.\,|x - x_0| \quad \text{pro } n \to \infty$$

Důkaz.

Vztah pro poloměr konvergence R plyne z podílového kritéria resp. z odmocninového kritéria. Pokud totiž existuje příslušná limita z věty, potom je

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \sqrt[n]{|a_n\,(x-x_0)^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}\,.\,\sqrt[n]{|x-x_0|^n} = \sqrt[n]{|a_n|}\,.\,|x-x_0|$$
$$\to a\,.\,|x-x_0| \quad \text{pro } n\to\infty$$

Tedy mocninná řada konverguje (absolutně), pokud je $a\,.\,|x-x_0| < 1$, a nekonverguje, pokud je $a\,.\,|x-x_0| > 1$. Pro $a\,.\,|x-x_0| = 1$ konvergovat může i nemusí.

Důkaz.

Vztah pro poloměr konvergence R plyne z podílového kritéria resp. z odmocninového kritéria. Pokud totiž existuje příslušná limita z věty, potom je

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \sqrt[n]{|a_n\,(x-x_0)^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}\,.\,\sqrt[n]{|x-x_0|^n} = \sqrt[n]{|a_n|}\,.\,|x-x_0|$$
$$\to a\,.\,|x-x_0| \quad \text{pro } n\to\infty$$

Tedy mocninná řada konverguje (absolutně), pokud je $a\,.\,|x-x_0|<1$, a nekonverguje, pokud je $a\,.\,|x-x_0|>1$. Pro $a\,.\,|x-x_0|=1$ konvergovat může i nemusí.
To znamená, že pokud je $a>0$, řada konverguje pro $|x-x_0|<\frac{1}{a}$ a nekonverguje pro $|x-x_0|>\frac{1}{a}$, neboli $R=\frac{1}{a}$.
Pokud je $a=0$, je $a\,.\,|x-x_0|=0<1$ pro všechna $x\in\mathbb{R}$, a tedy řada konverguje pro všechna $x\in\mathbb{R}$, neboli $R=\infty$.
A pokud je $a=\infty$, je $a\,.\,|x-x_0|=\infty>1$ pro všechna $x\neq x_0$, neboli řada nekonveguje pro všechna $x\neq x_0$, neboli $R=0$. □

Poznámka

Předpoklad existence *limity* ve větě je příliš silný. Lze ukázat, že stačí místo limity použít limitu superior (která existuje vždy), tj.

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a, \qquad \text{případně} \qquad \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = a.$$

Poznámka

Předpoklad existence *limity* ve větě je příliš silný. Lze ukázat, že stačí místo limity použít limitu superior (která existuje vždy), tj.

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a, \qquad \text{případně} \qquad \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = a.$$

Může nastat situace, že $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a$ existuje, zatímco $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ neexistuje (opačně nikoliv!). Je tedy vidět, že stačí vždy počítat poloměr konvergence pomocí vzorečku s $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a$ (pokud tedy tato limita existuje jako vlastní nebo jako nevlastní).

Vlastnosti mocninných řad

Mocninné řady (jakožto „polynomy“ nekonečného stupně) sdílejí s polynomy všechny důležité vlastnosti. Zejména, ze stejnoměrné konvergence mocninné řady na libovolném uzavřeném podintervalu intervalu konvergence plnye, že:

- součet mocninné řady je *spojitá* funkce,

Vlastnosti mocninných řad

Mocninné řady (jakožto „polynomy“ nekonečného stupně) sdílejí s polynomy všechny důležité vlastnosti. Zejména, ze stejnoměrné konvergence mocninné řady na libovolném uzavřeném podintervalu intervalu konvergence plnye, že:

– součet mocninné řady je *spojitá* funkce,

– mocninnou řadu můžeme *derivovat* člen po členu, přičemž se nemění poloměr konvergence,

Vlastnosti mocninných řad

Mocninné řady (jakožto „polynomy“ nekonečného stupně) sdílejí s polynomy všechny důležité vlastnosti. Zejména, ze stejnoměrné konvergence mocninné řady na libovolném uzavřeném podintervalu intervalu konvergence plnye, že:

- součet mocninné řady je *spojitá* funkce,
- mocninnou řadu můžeme *derivovat* člen po členu, přičemž se nemění poloměr konvergence,
- mocninnou řadu můžeme *integrovat* (neurčitým i určitým integrálem) člen po členu, přičemž se nemění poloměr konvergence.

Příklad

Určete poloměr konvergence a součet mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^n = x + 2\,x^2 + 3\,x^3 + 4\,x^4 + \ldots .$$

Příklad

Určete poloměr konvergence a součet mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^n = x + 2\,x^2 + 3\,x^3 + 4\,x^4 + \dots .$$

Řešení

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \to 1 = a, \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{a} = 1.$$

Tedy řada konverguje pro $x \in (-1, 1)$ a zřejmě nekonverguje v krajních bodech tohoto intervalu.

Příklad

Určete poloměr konvergence a součet mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^n = x + 2\,x^2 + 3\,x^3 + 4\,x^4 + \dots .$$

Řešení

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \to 1 = a, \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{a} = 1.$$

Tedy řada konverguje pro $x \in (-1, 1)$ a zřejmě nekonverguje v krajních bodech tohoto intervalu.
Protože je $n\,x^{n-1} = (x^n)'$, součet této řady určíme z věty o derivaci mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^n = x \,.\, \sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1} = x \,.\, \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x \,.\, \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' =$$

$$= x \,.\, \left(\frac{x}{1-x}\right)' = x \,.\, \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Příklad

Určete součet mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

a tedy pro $x = 1$ také součet alternující harmonické řady.

Příklad

Určete součet mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

a tedy pro $x = 1$ také součet alternující harmonické řady.

Řešení

Tato mocninná řada konverguje pro $x \in (-1, 1]$. Protože je $\frac{x^{n+1}}{n+1} = \int x^n \, dx$, součet této řady určíme z věty o integraci mocninné řady.

Příklad

Určete součet mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

a tedy pro $x = 1$ také součet alternující harmonické řady.

Řešení

Tato mocninná řada konverguje pro $x \in (-1, 1]$. Protože je $\frac{x^{n+1}}{n+1} = \int x^n \, dx$, součet této řady určíme z věty o integraci mocninné řady.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \int x^n \, dx \right) =$$

$$= \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \right) dx = \int \frac{1}{1+x} \, dx = \ln(1+x) + C, \text{ pro } x \in (-1, 1).$$