Matematika II – 11. přednáška
Taylorova řada

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

7. 12. 2011

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB102`, *e*-text.

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB102`, *e*-text.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka – **Nekonečné řady s programem Maple**, CD, *e*-text a videozáznamy, `http://www.math.muni.cz/~plch/nkpm`.
- Matematika **III**, Fakulta strojního inženýrství, 2007, `http://mathonline.fme.vutbr.cz/Fourierovy-rady/sc-73-sr-1-a-60/`

Plán přednášky

Pokud se v Taylorově polynomu budou brát členy se stále vyššími derivacemi (až do nekonečna), dostaneme Taylorovu řadu příslušnou k dané funkci $f(x)$.

Definice (Taylorova a Maclaurinova řada)

Nechť $f(x)$ je funkce, která má na nějakém intervalu (obsahujícím bod x_0 jakožto vnitřní bod) derivace všech řádů. *Taylorova řada* se středem v bodě x_0 příslušná k funkci $f(x)$ je mocninná řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n =$$

$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} + \dots .$$

Tzn. Taylorova řada je mocninná řada se středem v bodě x_0 a koeficienty $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.
Pokud je $x_0 = 0$, potom se Taylorova řada nazývá *Maclaurinovou řadou* příslušnou k funkci $f(x)$.

Příklad

- Protože má funkce $f(x) = \sin x$ derivace všech řádů a hodnoty funkce $\sin x$ a jejích derivací v bodě $x_0 = 0$ jsou postupně 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, atd., Maclaurinova řada pro funkci $\sin x$ je tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \dots .$$

Její poloměr konvergence je $R = \infty$.

Příklad

- Protože má funkce $f(x) = \sin x$ derivace všech řádů a hodnoty funkce $\sin x$ a jejích derivací v bodě $x_0 = 0$ jsou postupně 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, atd., Maclaurinova řada pro funkci $\sin x$ je tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \dots .$$

  Její poloměr konvergence je $R = \infty$.

- Protože má funkce $f(x) = e^x$ derivace všech řádů a hodnoty funkce e^x a jejích derivací v bodě $x_0 = 0$ jsou všechny rovny 1, Maclaurinova řada pro funkci e^x je tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \frac{1}{5!} x^5 + \dots .$$

  Její poloměr konvergence je $R = \infty$.

Příklad

Funkce

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{pro } x \neq 0, \\ 0, & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

je spojitá a má derivace všech řádů na celém $\mathbb{R}$. V bodě $x_0 = 0$ toto lze ukázat pomocí výpočtu jednostranných derivací $f'_-(0)$ a $f'_+(0)$, $f''_-(0)$ a $f''_+(0)$. Zejména jsou všechny tyto derivace v bodě $x_0 = 0$ rovny 0. Tedy příslušná Maclaurinova řada je tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 + 0 \,.\, x + \frac{0}{2} x^2 + \frac{0}{3!} x^3 + \cdots = 0.$$

Tedy jedná se o nulovou řadu, která samozřejmě konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$ k nulové funkci $s(x) \equiv 0$, která není rovna původní funkci $f(x)$.

Otázku, kdy Taylorova (Maclaurinova) řada funkce $f(x)$ konverguje k funkci $f(x)$, zodpovídá následující tvrzení, které je bezprostředním důsledkem obdobné věty o Taylorově polynomu.

Věta (o konvergenci Taylorovy řady)

1. *Taylorova řada funkce $f(x)$ konverguje na svém konvergenčním intervalu I k funkci $f(x)$, tj. platí rovnost*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad \text{pro všechna } x \in I,$$

$\Leftrightarrow$ *pro posloupnost Taylorových zbytků* $\{R_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *platí* $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ *pro všechna* $x \in I$.

Otázku, kdy Taylorova (Maclaurinova) řada funkce $f(x)$ konverguje k funkci $f(x)$, zodpovídá následující tvrzení, které je bezprostředním důsledkem obdobné věty o Taylorově polynomu.

Věta (o konvergenci Taylorovy řady)

1. *Taylorova řada funkce $f(x)$ konverguje na svém konvergenčním intervalu I k funkci $f(x)$, tj. platí rovnost*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad \text{pro všechna } x \in I,$$

$\Leftrightarrow$ *pro posloupnost Taylorových zbytků* $\{R_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *platí* $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ *pro všechna* $x \in I$.

2. *Zejména, pokud jsou všechny derivace $f^{(n)}(x)$ stejně ohraničené na intervalu I (tj. pokud existuje M tak, že $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M$ pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ a $x \in I$), potom Taylorova řada konverguje k $f(x)$.*

Maclaurinovy řady elementárních funkcí

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \qquad \text{pro } x \in (-1, 1].$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \text{pro } x \in (-1, 1).$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \qquad \text{pro } x \in (-1, 1).$$

Plán přednášky

Nekonečné řady (a to řady číselné i řady funkcí) mají mnoho aplikací. Mezi jinými jde o:

- *přibližné výpočty* funkčních hodnot

Nekonečné řady (a to řady číselné i řady funkcí) mají mnoho aplikací. Mezi jinými jde o:

- *přibližné výpočty* funkčních hodnot
- *aproximace funkcí*

Nekonečné řady (a to řady číselné i řady funkcí) mají mnoho aplikací. Mezi jinými jde o:

- *přibližné výpočty* funkčních hodnot
- *aproximace funkcí*
- *výpočet limit*

Nekonečné řady (a to řady číselné i řady funkcí) mají mnoho aplikací. Mezi jinými jde o:

- *přibližné výpočty* funkčních hodnot
- *aproximace funkcí*
- *výpočet limit*
- *výpočet integrálů vyšších funkcí*

Nekonečné řady (a to řady číselné i řady funkcí) mají mnoho aplikací. Mezi jinými jde o:

- *přibližné výpočty* funkčních hodnot
- *aproximace funkcí*
- *výpočet limit*
- *výpočet integrálů vyšších funkcí*
- *řešení diferenciálních rovnic*

Nekonečné řady (a to řady číselné i řady funkcí) mají mnoho aplikací. Mezi jinými jde o:

- *přibližné výpočty* funkčních hodnot
- *aproximace funkcí*
- *výpočet limit*
- *výpočet integrálů vyšších funkcí*
- *řešení diferenciálních rovnic*

Nekonečné řady (a to řady číselné i řady funkcí) mají mnoho aplikací. Mezi jinými jde o:

- *přibližné výpočty* funkčních hodnot
- *aproximace funkcí*
- *výpočet limit*
- *výpočet integrálů vyšších funkcí*
- *řešení diferenciálních rovnic*

Příklad

Pomocí prvních n členů Taylorova rozvoje určete přibližnou hodnotu

- $\sqrt{e} \qquad (n = 5)$,
- $\sqrt[5]{245} \qquad (n = 2)$.

Při odhadech hodnot funkcí je samozřejmě potřeba znát i požadovanou přesnost, resp. umět (shora) odhadnout chybu, jíž se dopouštíme.

Věta

Je-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *nerostoucí posloupnost nezáporných čísel splňující* $\lim a_n = 0$, *pak pro zbytek* $R_n = (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \cdots$ *alternující řady* $\sum (-1)^{n-1} a_n$ *platí, že*

$$|R_n| < a_{n+1}.$$

Při odhadech hodnot funkcí je samozřejmě potřeba znát i požadovanou přesnost, resp. umět (shora) odhadnout chybu, jíž se dopouštíme.

Věta

Je-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *nerostoucí posloupnost nezáporných čísel splňující* $\lim a_n = 0$, *pak pro zbytek* $R_n = (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \cdots$ *alternující řady* $\sum (-1)^{n-1} a_n$ *platí, že*

$$|R_n| < a_{n+1}.$$

Věta

Nechť $\sum a_n$ *je číselná řada, pro niž platí*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1,$$

pak pro zbytek této řady platí $|R_n| \leq |a_n| \cdot \frac{q}{1-q}$.

Příklad

Vypočtěte $\sin 18^\circ$ s chybou menší než 10^{-4}.

Příklad

Vypočtěte $\sin 18^\circ$ s chybou menší než 10^{-4}.

Řešení

S využitím Maclaurinovy řady pro $\sin x$ dostáváme po dosazení $x = \frac{\pi}{10}$

$$\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} - \frac{1}{3!}\Big(\frac{\pi}{10}\Big)^3 + \frac{1}{5!}\Big(\frac{\pi}{10}\Big)^5 - \cdots .$$

Podle věty o odhadu zbytku alternující řady vidíme, že stačí vzít první dva členy řady, neboť

$$|R_2| < a_{n+1} = \frac{1}{5!}\Big(\frac{\pi}{10}\Big)^5 = \frac{\pi^5}{120\cdot 10^5} < 10^{-4}.$$

Příklad

Vypočtěte $\sin 18^\circ$ s chybou menší než 10^{-4}.

Řešení

S využitím Maclaurinovy řady pro $\sin x$ dostáváme po dosazení $x = \frac{\pi}{10}$

$$\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^5 - \cdots .$$

Podle věty o odhadu zbytku alternující řady vidíme, že stačí vzít první dva členy řady, neboť

$$|R_2| < a_{n+1} = \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^5 = \frac{\pi^5}{120 \cdot 10^5} < 10^{-4}.$$

Dostáváme tak odhad

$$\sin 18^\circ \approx \frac{\pi}{10} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^3 \approx 0{,}309.$$

Výpočet limit

Příklad

Vypočtěte limitu $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$.

Výpočet limit

Příklad

Vypočtěte limitu $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.

Řešení

Z rozvoje $\sin x$ dostaneme

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \cdots,$$

odkud snadno získáme výslednou limitu rovnu jedné.

Výpočet limit

Příklad

Vypočtěte limitu $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.

Řešení

Z rozvoje $\sin x$ dostaneme

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \cdots ,$$

odkud snadno získáme výslednou limitu rovnu jedné.

Příklad

Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty} \left(x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right).$$

Integrály vyšších funkcí

Příklad

Primitivní funkce k funkci $\frac{\sin x}{x}$ je funkce

$$\int \frac{\sin x}{x}\, dx = \int \frac{1}{x} \cdot \left(x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \dots \right) dx$$

$$= x - \frac{1}{3!}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{5!}\frac{x^5}{5} - \dots + C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}\, x^{2n+1} + C.$$

Integrály vyšších funkcí

Příklad

Primitivní funkce k funkci $\frac{\sin x}{x}$ je funkce

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx = \int \frac{1}{x}\cdot\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots\right)dx$$

$$= x - \frac{1}{3!}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{5!}\frac{x^5}{5} - \dots + C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}x^{2n+1} + C.$$

Příklad

Přibližně vypočtěte $\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$ (s chybou menší než 10^{-4}).

Basilejský problém

Příklad (Leonhard Euler, 1735)

Určete součet číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots .$$

Basilejský problém

Příklad (Leonhard Euler, 1735)

Určete součet číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots .$$

Řešení

Funkce $\frac{\sin x}{x}$ má rozvoj $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \dots$. Její kořeny jsou zřejmě $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 4\pi$, atd. a tedy tuto funkci lze „rozložit“ na (nekonečný) součin kořenových činitelů

$$\left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \dots$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right) \cdot \dots .$$

Řešení (dokončení)

Porovnáním koeficientů u x^2 (po roznásobení) dostaneme

$$-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2} - \frac{1}{9\pi^2} - \frac{1}{16\pi^2} - \dots,$$

čili po vynásobení číslem $-\pi^2$ dostaneme

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Řešení (dokončení)

Porovnáním koeficientů u x^2 (po roznásobení) dostaneme

$$-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2} - \frac{1}{9\pi^2} - \frac{1}{16\pi^2} - \dots,$$

čili po vynásobení číslem $-\pi^2$ dostaneme

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Toto řešení slavného problému ukázal Euler v roce 1735. Je samozřejmě nutné je precizovat (zejména s ohledem na použití nekonečných součinů, jež jsme ani formálně nezavedli).

Plán přednášky

Fourierovy řady

Příjemné vlastnosti mocninných řad zároveň poukazují na hranice jejich použitelnosti při modelování závislostí nějakých praktických jevů nebo procesů. Zejména není možné pomocí mocninných řad dobře modelovat po částech spojité funkce. Jak uvidíme vzápětí, je možné pro konkrétněji vymezené potřeby nacházet lepší sady funkcí $f_n(x)$ než jsou hodnoty $f_n(x) = x^n$. Nejznámějšími příklady jsou Fourierovy řady používané pro aproximaci periodických funkcí a tzv. wavelety.

Definice

Pro pevný interval $I = [a, b]$, konečný nebo nekonečný, definujeme kvadrát vzdálenosti funkcí na I takto:

$$\|f - g\|^2 = \int_a^b |f(x) - g(x)|^2 \, dx.$$

Samozřejmě je třeba předpokládat, že tento Riemannův integrál existuje. Velikost $\|f\|$ funkce f je pak její vzdálenost od funkce nulové, tj.

$$\|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 \, dx.$$

Definice

Pro pevný interval $I = [a, b]$, konečný nebo nekonečný, definujeme kvadrát vzdálenosti funkcí na I takto:

$$\|f - g\|^2 = \int_a^b |f(x) - g(x)|^2 \, dx.$$

Samozřejmě je třeba předpokládat, že tento Riemannův integrál existuje. Velikost $\|f\|$ funkce f je pak její vzdálenost od funkce nulové, tj.

$$\|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 \, dx.$$

Funguje dobře pro množinu $\mathcal{S} = \mathcal{S}[a, b]$ omezených a po částech spojitých reálných funkcí na I.

Z vlastností integrálu plyne, že $\mathcal{S}$ je vektorový prostor a že námi právě uvažovaná velikost je odvozena z dobře definovaného skalárního součinu, tj. symetrického bilineárního zobrazení

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx,$$

s příslušnými vlastnostmi.

Z vlastností integrálu plyne, že $\mathcal{S}$ je vektorový prostor a že námi právě uvažovaná velikost je odvozena z dobře definovaného skalárního součinu, tj. symetrického bilineárního zobrazení

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx,$$

s příslušnými vlastnostmi.
V konečněrozměrném případě jsme takto definovali velikost vektorů. Nyní je to naprosto stejné a pokud zúžíme naši definici na vektorový prostor generovaný nad reálnými čísly jen konečně mnoha funkcemi $f_1, \dots, f_k$, dostaneme opět dobře definovaný skalární součin na tomto konečněrozměrném vektorovém podprostoru.

Máme-li generátory g_i s vlastností

$$\langle g_i, g_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j \\ 1 & \text{pro } i = j \end{cases}$$

hovoříme o tzv. **ortonormální bázi** (pracujeme také s ortogonálními bázemi).

Máme-li generátory g_i s vlastností

$$\langle g_i, g_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j \\ 1 & \text{pro } i = j \end{cases}$$

hovoříme o tzv. **ortonormální bázi** (pracujeme také s ortogonálními bázemi).
Grammova–Schmidtova ortogonalizace, která z libovolného spočetného systému generátorů f_i vytvoří nové ortogonální generátory g_i téhož prostoru, tj. $\langle g_i, g_j \rangle = 0$ pro všechny $i \neq j$.

Máme-li generátory g_i s vlastností

$$\langle g_i, g_j\rangle = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j \\ 1 & \text{pro } i = j \end{cases}$$

hovoříme o tzv. **ortonormální bázi** (pracujeme také s ortogonálními bázemi).
Grammova–Schmidtova ortogonalizace, která z libovolného spočetného systému generátorů f_i vytvoří nové ortogonální generátory g_i téhož prostoru, tj. $\langle g_i, g_j\rangle = 0$ pro všechny $i \neq j$.
Spočteme je postupně: $g_1 = f_1$ a formulemi

$$g_{\ell+1} = f_{\ell+1} + a_1 g_1 + \cdots + a_\ell g_\ell, \quad a_i = -\frac{\langle f_{\ell+1}, g_i\rangle}{\|g_i\|^2}$$

pro $\ell > 1$.

Máme-li generátory g_i s vlastností

$$\langle g_i, g_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j \\ 1 & \text{pro } i = j \end{cases}$$

hovoříme o tzv. **ortonormální bázi** (pracujeme také s ortogonálními bázemi).

Grammova–Schmidtova ortogonalizace, která z libovolného spočetného systému generátorů f_i vytvoří nové ortogonální generátory g_i téhož prostoru, tj. $\langle g_i, g_j \rangle = 0$ pro všechny $i \neq j$.

Spočteme je postupně: $g_1 = f_1$ a formulemi

$$g_{\ell+1} = f_{\ell+1} + a_1 g_1 + \cdots + a_\ell g_\ell, \quad a_i = -\frac{\langle f_{\ell+1}, g_i \rangle}{\|g_i\|^2}$$

pro $\ell > 1$.

Příkladem jsou např. Legendreovy polynomy.

Připomeňme si výhody, které ortonormální báze podprostorů měly pro konečněrozměrné vektorové prostory. Můžeme pokračovat v příkladu Legendreových polynomů $P_0(x)$, $P_1(x)$ a $P_2(x)$, které generují $\mathbb{R}_2[x]$ a uvažovat třeba $V = \mathbb{R}_\infty[x]$. Pro libovolný polynom $h \in V$ bude funkce

$$H = \langle h, h_1 \rangle h_1 + \langle h, h_2 \rangle h_2 + \langle h, h_3 \rangle h_3$$

jednoznačně určenou funkcí, která minimalizuje vzdálenost $\|h - H\|$ mezi všemi funkcemi v $\mathbb{R}_2[x]$.

Připomeňme si výhody, které ortonormální báze podprostorů měly pro konečněrozměrné vektorové prostory. Můžeme pokračovat v příkladu Legendreových polynomů $P_0(x)$, $P_1(x)$ a $P_2(x)$, které generují $\mathbb{R}_2[x]$ a uvažovat třeba $V = \mathbb{R}_\infty[x]$. Pro libovolný polynom $h \in V$ bude funkce

$$H = \langle h, h_1 \rangle h_1 + \langle h, h_2 \rangle h_2 + \langle h, h_3 \rangle h_3$$

jednoznačně určenou funkcí, která minimalizuje vzdálenost $\|h - H\|$ mezi všemi funkcemi v $\mathbb{R}_2[x]$.
Koeficienty pro nejlepší aproximaci zadané funkce pomocí funkce z vybraného podprostoru je možné tedy získat prostě integrací.
Stejně tak ale tato formule zadá nejlepší aproximaci polynomem nejvýše druhého stupně pro libovolnou funkci $h \in \mathcal{S}[a, b]$ ve smyslu naší vzdálenosti funkcí na tomto prostoru.

Poslední příklad vybízí k zobecnění – co se stane, když zvolíme úplně libovolný spočetný systém lineárně nezávislých funkcí v $\mathcal{S}$ takový, že každé dvě různé z nich mají nulový skalární součin? Takovému systému funkcí na intervalu I říkáme **ortogonální systém funkcí**. Jestliže jsou všechny funkce f_n v posloupnosti po dvou ortogonální a zároveň je pro všechna n velikost $\|f_n\| = 1$ normovaná, hovoříme o **ortonormálním systému funkcí**.

Poslední příklad vybízí k zobecnění – co se stane, když zvolíme úplně libovolný spočetný systém lineárně nezávislých funkcí v $\mathcal{S}$ takový, že každé dvě různé z nich mají nulový skalární součin? Takovému systému funkcí na intervalu I říkáme **ortogonální systém funkcí**. Jestliže jsou všechny funkce f_n v posloupnosti po dvou ortogonální a zároveň je pro všechna n velikost $\|f_n\| = 1$ normovaná, hovoříme o **ortonormálním systému funkcí**.

Nechť tedy tvoří posloupnost funcí f_n ortogonální systém po částech spojitých funkcí na intervalu $I = [a, b]$ a předpokládejme, že pro konstanty c_n konverguje řada

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$$

stejnoměrně na I. Pak snadno vyjádříme skalární součin $\langle F, f_n \rangle$ po jednotlivých sčítancích:

$$\langle F, f_n \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \int_a^b f_m(x) f_n(x)\, dx = c_n \|f_n\|^2.$$

Lze tedy očekávat , v jakou odpověď je možné doufat, a tu nám skutečně dává následující věta:

Věta

Nechť f_n, $n = 1, 2, \ldots$, *je ortogonální posloupnost funkcí Riemannovsky integrovatelných na* $I = [a, b]$ *a nechť* g *je libovolná funkce, jejíž kvadrát je Riemannovsky integrovatelný na* I. *Označme*

$$c_n = \|f_n\|^{-2} \int_a^b f_n(x) g(x)\, dx$$

(tzv. Fourierovy koeficienty funkce g *).*
(1) Pro libovolné pevné $n \in \mathbb{N}$ *má ze všech lineárních kombinací funkcí* $f_1, \ldots, f_n$ *nejmenší vzdálenost od* g *výraz*

$$h_n = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x).$$

Věta (pokračování)

(2) (Besselova nerovnost) Řada čísel $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \|f_n\|^2$ *vždy konverguje a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \|f_n\|^2 \leq \|g\|^2.$$

(3) Vzdálenost g *od částečných součtů* $s_k = \sum_{n=1}^{k} c_n f_n$ *jde v limitě k nule, tj.*

$$\lim_{k\to\infty} \|g - s_k\|^2 = 0,$$

tehdy a jen tehdy, když platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \|f_n\|^2 = \|g\|^2$$

(tzv. Parsevalova rovnost).

Zkusme lépe porozumět významu jednotlivých tvrzení této věty.

Zkusme lépe porozumět významu jednotlivých tvrzení této věty. Náš ortogonální systém funcí je libovolný, nemůžeme očekávat, že lze dobře aproximovat jakoukoliv funkci pomocí lineárních kombinací funkcí f_i. Např. když se omezíme u ortogonálních polynomů pouze na sudé stupně, určitě budeme dobře aproximovat pouze sudé funkce.

Zkusme lépe porozumět významu jednotlivých tvrzení této věty.
Náš ortogonální systém funcí je libovolný, nemůžeme očekávat, že lze dobře aproximovat jakoukoliv funkci pomocí lineárních kombinací funkcí f_i. Např. když se omezíme u ortogonálních polynomů pouze na sudé stupně, určitě budeme dobře aproximovat pouze sudé funkce.
Nicméně hned první tvrzení nám říká, že vždycky budeme dosahovat nejlepší možné aproximace částečnými součty.
Druhé a třetí tvrzení pak můžeme vnímat jako analogii ke kolmým průmětům do podprostorů vyjádřených pomocí souřadnic.

Skutečně, pokud pro naši funkci g bodově konverguje řada $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$, pak je funkce $F(x)$ kolmým průmětem g do vektorového podprostoru všech takovýchto řad.

Skutečně, pokud pro naši funkci g bodově konverguje řada $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$, pak je funkce $F(x)$ kolmým průmětem g do vektorového podprostoru všech takovýchto řad.
Zároveň ale naše věta neříká, že by částečné součty uvažované řady musely bodově konvergovat k nějaké funkci. Tj. řada $F(x)$ nemusí být obecně konvergentní ani v případě, kdy nastane rovnost v (3).

Fourierovy řady

Předchozí věta naznačuje, že umíme se spočetnými ortogonálními systémy f_n funkcí pracovat velice podobně jako s konečnými ortogonálními bazemi vektorových prostorů, jsou tu ale zásadní rozdíly:

Fourierovy řady

Předchozí věta naznačuje, že umíme se spočetnými ortogonálními systémy f_n funkcí pracovat velice podobně jako s konečnými ortogonálními bazemi vektorových prostorů, jsou tu ale zásadní rozdíly:

- Není snadné říci, jak vypadá celý prostor konvergentních nebo stejnoměrně konvergentních řad $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$.
- Pro danou integrovatelnou funkci umíme najít jen nejlepší možné přiblížení takovou řadou $F(x)$.

Fourierovy řady

Předchozí věta naznačuje, že umíme se spočetnými ortogonálními systémy f_n funkcí pracovat velice podobně jako s konečnými ortogonálními bazemi vektorových prostorů, jsou tu ale zásadní rozdíly:

- Není snadné říci, jak vypadá celý prostor konvergentních nebo stejnoměrně konvergentních řad $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$.
- Pro danou integrovatelnou funkci umíme najít jen nejlepší možné přiblížení takovou řadou $F(x)$.

V případě, že místo ortogonálního systému f_n máme systém ortonormální, jsou formulky ve větě o něco jednodušší, žádné další zlepšení ale nenastane.

Jako pěkný příklad na integrování lze elementárními metodami ověřit, že systém funkcí

$$1,\ \sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x,\ \ldots,\ \sin nx,\ \cos nx,\ \ldots$$

je ortogonální systém na intervalu $[-\pi, \pi]$ (a také na kterémkoliv jiném intervalu o délce 2π).

Jako pěkný příklad na integrování lze elementárními metodami ověřit, že systém funkcí

$$1,\ \sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x,\ \dots,\ \sin nx,\ \cos nx,\ \dots$$

je ortogonální systém na intervalu $[-\pi, \pi]$ (a také na kterémkoliv jiném intervalu o délce 2π).
Řady z předchozí věty odpovídající tomuto systému nazýváme **Fourierovy řady**. I v obecném případě diskutovaném výše se někdy hovoří o obecných Fourierových řadách vzhledem k ortogonálnímu systému funkcí f_n. Koeficienty c_n se pak nazývají **Fourierovy koeficienty funkce** f.

Na intervalu $[-\pi, \pi]$ jsou velikosti všech funkcí kromě první vždy $\sqrt{\pi}$, první má velikost $\sqrt{2\pi}$. Lze dokázat, že náš systém funkcí je úplným ortogonálním systémem, nebudeme to zde ale dokazovat.

Na intervalu $[-\pi, \pi]$ jsou velikosti všech funkcí kromě první vždy $\sqrt{\pi}$, první má velikost $\sqrt{2\pi}$. Lze dokázat, že náš systém funkcí je úplným ortogonálním systémem, nebudeme to zde ale dokazovat. Ve smyslu vzdálenosti funkcí definované pomocí našeho skalárního součinu proto budou částečné součty Fourierovy řady $F(x)$ pro libovolnou funkci $g(x)$ s konečným integrálem $\int_a^b g(x)^2\,dx$, tj.

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

s koeficienty

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(nx)\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(nx)\,dx,$$

vždy konvergovat k funkci $g(x)$.

Shrňme naše úvahy do následujícího tvrzení.

Věta

Fourierova řada libovolné integrovatelné funkce $g(x)$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ má vzhledem k systému

$$1,\ \sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x,\ \dots,\ \sin nx,\ \cos nx,\ \dots$$

tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

s koeficienty

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx)\, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(nx)\, dx.$$

Shrňme naše úvahy do následujícího tvrzení.

Věta

Fourierova řada libovolné integrovatelné funkce $g(x)$ *na intervalu* $[-\pi, \pi]$ *má vzhledem k systému*

$$1,\ \sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x,\ \dots,\ \sin nx,\ \cos nx,\ \dots$$

tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

s koeficienty

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx)\, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(nx)\, dx.$$

Je-li $g(x)$ *sudá, jsou všechny* b_n *nulové a je-li lichá, jsou všechny* a_n *nulové.*

Z obecnějších úvah lze odvodit, že z konvergence v tomto smyslu vždy vyplývá bodová konvergence částečných součtů ve skoro všech bodech $x \in I$. Nebudeme zde ale ani vysvětlovat, co znamená „skoro všechny“, ani nebudeme takový výsledek dokazovat.

Z obecnějších úvah lze odvodit, že z konvergence v tomto smyslu vždy vyplývá bodová konvergence částečných součtů ve skoro všech bodech $x \in I$. Nebudeme zde ale ani vysvětlovat, co znamená „skoro všechny“, ani nebudeme takový výsledek dokazovat. Jako příklad uveďme Fourierovu řadu pro periodickou funkci vzniklou zúžením analogie Heavisideovy funkce na jednu periodu. Tj. naše funkce g bude na intervalu $[-\pi, 0]$ rovna -1 a na intervalu $[0, \pi]$ bude rovna 1. Protože jde o funkci lichou, jistě budou všechny koeficienty u funkcí $\cos(nx)$ nulové, a pro koeficienty u funkcí $\sin(nx)$ spočteme

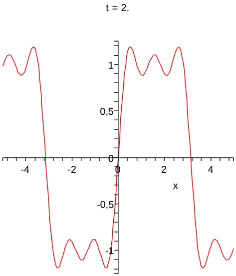
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n).$$

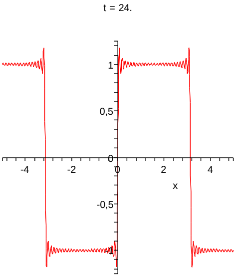
Výsledná Fourierova řada je tedy tvaru

$$g(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \dots\right)$$

a součet jejích prvních pěti a prvních padesáti členů je na následujících dvou obrázcích.

Všimněme si, že se zvyšujícím se počtem členů řady se výrazně spřesňuje aproximace s výjimkou stále se zmenšujícího okolí bodu nespojitosti, na němž je ale maximum odchylky stále zhruba stejné. Je to obecná vlastnost Fourierových řad, které se říká Gibbsův jev.





Povšimněme si také, že v samotném bodě nespojitosti je hodnota aproximující funkce právě v polovině mezi limitami zprava a zleva pro Heavisideovu funkci. Nelze očekávat, že by konvergence pro funkce s body nespojitosti mohla být stejnoměrná (to by totiž g musela být coby stejnoměrná limita spojitých funkcí sama spojitá!).

Bez podrobného důkazu si uvedeme následující větu podávající ucelený obrázek o bodové konvergenci Fourierových řad. Nejde o nutné podmínky konvergence a v literatuře lze najít řadu jiných formulací. Tato je ale jednoduchá a postihuje velké množství užitečných případů.

Věta (Dirichletova)

Nechť g je po částech spojitá a monotonní na intervalu $[-\pi, \pi]$. Pak její Fourierova řada $F(x)$ konverguje na $[-\pi, \pi]$ a součet je

- *roven hodnotě $g(x_0)$ v každém bodě $x_0 \in [-\pi, \pi]$, ve kterém je funkce $g(x)$ spojitá,*
- *v každém bodě nespojitosti x_0 funkce $g(x)$ roven*

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_0^+} g(x) + \lim_{x\to x_0^-} g(x)\right),$$

- *v krajních bodech intervalu $[-\pi, \pi]$ je roven*

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to -\pi^+} g(x) + \lim_{x\to \pi^-} g(x)\right).$$

Pokud navíc je $g(x)$ spojitá, periodická s periodou 2π a všude existuje její po částech spojitá derivace, pak konverguje její Fourierova řada $F(x)$ stejnoměrně.

Příklad

Nalezněte Fourierův rozvoj funkce $f(x) = x^2$ na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Příklad

Nalezněte Fourierův rozvoj funkce $f(x) = x^2$ na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Řešení

Funkce f je sudá, proto jsou koeficienty $b_n = 0$. Dále

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{3}\pi^2,$$

Příklad

Nalezněte Fourierův rozvoj funkce $f(x) = x^2$ na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Řešení

Funkce f je sudá, proto jsou koeficienty $b_n = 0$. Dále

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, dx = \frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx = \frac{4}{n^2}(-1)^n.$$

Příklad

Nalezněte Fourierův rozvoj funkce $f(x) = x^2$ na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Řešení

Funkce f je sudá, proto jsou koeficienty $b_n = 0$. Dále

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x)\,dx = \frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{4}{n^2}(-1)^n.$$

Celkem tedy

$$x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}.$$