Matematika II – 12. přednáška
Elementární diferenciální rovnice

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

14. 12. 2011

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB102`, *e*-text.

Plán přednášky

Úvod a motivace

Diferenciální rovnice je rovnice, ve které se vyskytuje neznámá funkce spolu se svou derivací (či derivacemi vyšších řádů). Diferenciální rovnice slouží k modelování fyzikálních procesů, vyskytují se v ekonomii, biologii, chemii, atd.

Příklad

Příklady fyzikálních procesů, které jsou modelovány diferenciálními rovnicemi.

(a) Neznámá funkce je $u = u(x)$ (poloha bodu na přímce),

$$m \,.\, u'' = F(x) \qquad \text{(Newtonův zákon).}$$

(b) Neznámá funkce je $u = u(x, t)$ (teplota v bodě x na přímce v čase t),

$$\alpha^2 \,.\, u_{xx} = u_t \qquad \text{(vedení tepla na přímce).}$$

Příklad

(c) Neznámá funkce je $u = u(x, t)$ (vychýlení v bodě x na přímce v čase t),

$$\alpha^2 \,.\, u_{xx} = u_{tt} \qquad \text{(vlnová rovnice).}$$

(d) Neznámá funkce je $\theta = \theta(t)$ (úhel v čase t),

$$\theta'' + \alpha \sin\theta = 0 \qquad \text{(matematické kyvadlo).}$$

(e) Neznámá funkce je $Q = Q(t)$ (množství radioaktivního materiálu v čase t),

$$Q' = -k\, Q \qquad \text{(radioaktivní rozpad).}$$

Otázky k zamyšlení

1. Jak poznáme, že daná diferenciální rovnice vůbec má řešení? (otázka existence řešení)
2. Je toto řešení jediné? (otázka jednoznačnosti řešení)
3. Kolik řešení existuje?
4. Jak najít toto/tato řešení? (metody řešení diferenciálních rovnic)
5. Jak určit chování případných řešení, aniž by bylo nutné danou diferenciální rovnici vyřešit? (kvalitativní vlastnosti řešení diferenciálních rovnic)

Příklad

Diferenciální rovnice $x\,y' + y = 0$ má řešení $y = \frac{C}{x}$ pro libovolné $C \in \mathbb{R}$, protože

$$y' = (Cx^{-1})' = -\frac{C}{x^2} \qquad \Rightarrow \qquad x\,y' + y = x\left(-\frac{C}{x^2}\right) + \frac{C}{x} = 0.$$

Tedy tato rovnice má nekonečně mnoho řešení.

Příklad

Diferenciální rovnice $x\,y' + y = 0$ má řešení $y = \frac{C}{x}$ pro libovolné $C \in \mathbb{R}$, protože

$$y' = (Cx^{-1})' = -\frac{C}{x^2} \qquad \Rightarrow \qquad x\,y' + y = x\left(-\frac{C}{x^2}\right) + \frac{C}{x} = 0.$$

Tedy tato rovnice má nekonečně mnoho řešení.

Definice

Řešení diferenciální rovnice je funkce $y = y(x)$ (případně funkce $y = y(t)$, $y = y(x, t)$, apod.), která splňuje danou diferenciální rovnici.

Řešení diferenciálních rovnic se obvykle najdou pomocí integrování, a proto budou obsahovat integrační konstanty. Tedy tzv. *obecné řešení* (tj. všechna řešení) dostaneme jako množinu danou těmito konstantami. Řešení dané tzv. počátečními podmínkami, např. $y(x_0) = y_0$, se nazývá *partikulární*.

Příklad

Obecné řešení diferenciální rovnice z Příkladu je

$$y = \frac{C}{x}, \qquad \text{kde } C \in \mathbb{R}.$$

Řešení této diferenciální rovnice splňující počáteční podmínku $y(1) = 1$ je $y = \frac{1}{x}$ (tohle je tedy partikulární řešení).

Příklad

Obecné řešení diferenciální rovnice z Příkladu je

$$y = \frac{C}{x}, \qquad \text{kde } C \in \mathbb{R}.$$

Řešení této diferenciální rovnice splňující počáteční podmínku $y(1) = 1$ je $y = \frac{1}{x}$ (tohle je tedy partikulární řešení).

Příklad

Matematicky lze každý příklad na výpočet primitivní funkce (neurčitý integrál) chápat jako diferenciální rovnici $y' = f(x)$, přičemž hledaná neznámá funkce y se vypočítá jako $y = \int f(x)\,dx$, tedy přímým integrováním.

Diferenciální rovnice 1. řádu

Definice

Řád diferenciální rovnice je řád nejvyšší derivace, která se v rovnici vyskytuje.

Nyní se budeme podrobněji zabývat deferenciálními rovnicemi 1. řádu. Tj. jsou to rovnice tvaru

$$y' = F(x, y).$$

Diferenciální rovnice 1. řádu

Definice

Řád diferenciální rovnice je řád nejvyšší derivace, která se v rovnici vyskytuje.

Nyní se budeme podrobněji zabývat deferenciálními rovnicemi 1. řádu. Tj. jsou to rovnice tvaru

$$y' = F(x, y).$$

(a) Rovnice $y' = y^2$ má nekonečně mnoho řešení (tedy obecné řešení) $y = \frac{1}{C-x}$, $C \in \mathbb{R}$, definovaných na $(-\infty, C)$ a na (C, ∞) a řešení $y = 0$ definované na celém $\mathbb{R}$.

(b) Rovnice $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$ a počáteční podmínka $y(0) = 0$ má řešení $y = 0$ a $y = x^3$ (a také libovolnou jejich navazující kombinaci). Tedy existuje nekonečně mnoho řešení.

Rovnice se separovanými proměnnými

Speciálními případy této diferenciální rovnice jsou rovnice se separovanými proměnnými a rovnice lineární, kterým se budeme blíže věnovat.

Definice (rovnice se separovanými proměnnými)

Jedná se o rovnici tvaru

$$y' = f(x)\,.\,g(y),$$

tj. pravá strana z obecné rovnice je $F(x, y) = f(x)\,.\,g(y)$, tj. je to *součin* funkce proměnné x a funkce proměnné y (odtud je název této rovnice).

Příklad

(a) Pro diferenciální rovnici

$$y' = \frac{x^2}{y\,.\,(1+x^3)} \qquad \text{je} \qquad f(x) = \frac{x^2}{1+x^3}, \quad g(y) = \frac{1}{y},$$

a proto se jedná o rovnici se separovanými proměnnými.

(b) Rovnice $y' = x + y$ není rovnice se separovanými proměnnými

Pokud napíšeme derivaci y' jako podíl diferenciálů $\frac{dy}{dx}$, tj. $y' = \frac{dy}{dx}$, potom lze rovnici se separovanými proměnnými přepsat na tvar

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \,.\, g(y), \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{g(y)}\, dy = f(x)\, dx,$$

odtud název – separované proměnné. A tuto poslední rovnici vyřešíme integrací na obou stranách – na levé straně podle proměnné y a na pravé straně podle proměnné x, tj.

$$\int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int f(x)\, dx + C.$$

Integrační konstantu lze zřejmě brát pouze jednou, např. tedy na pravé straně. Dostáváme tedy následující tvrzení.

Věta (O řešitelnosti diferenciální rovnice se separovanými proměnnými)

Jsou-li funkce $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *a* $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ *spojité a* $g(y) \neq 0$ *na intervalu* (c, d), *potom má počáteční úloha*

$$y' = f(x) \, . \, g(y), \qquad y(x_0) = y_0$$

právě jedno řešení, které je dáno **implicitně** *předchozím vztahem. Konstanta* C *se určí z počáteční podmínky* $y(x_0) = y_0$.

Příklad

Pro diferenciální rovnici z Příkladu máme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y\,.\,(1+x^3)} \qquad \Rightarrow \qquad y\,dy = \frac{x^2}{1+x^3}\,dx$$

$$\Rightarrow \qquad \int y\,dy = \int \frac{x^2}{1+x^3}\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{2} = \left| \begin{array}{l} 1+x^3 = u \\ 3x^2\,dx = du \end{array} \right|$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{3}\ln|u| + C = \frac{1}{3}\ln|1+x^3| + C$$

$$\Rightarrow \qquad y^2 = \frac{2}{3}\ln|1+x^3| + C.$$

Příklad (pokračování)

Pokud je navíc zadána počáteční podmínka $y(0) = 2$, potom dosazením do vypočteného vztahu za $x = 0$ a $y = 2$ dostaneme rovnici $4 = C$, a tedy partikulární řešení je

$$y = \sqrt{\frac{2}{3} \ln|1 + x^3| + 4}$$

(ve výše uvedeném vztahu bereme kladnou odmocninu, protože hodnota $y(0) = 2 > 0$).

Některé další typy rovnic lze jednoduchou substitucí převést na rovnici se separovanými proměnnými. Např. diferenciální rovnice tvaru

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

se pomocí substituce $u = \frac{y}{x}$ (Pozor, $u = u(x)$ je funkce proměnné x!) převede na rovnici se separovanými proměnnými. Skutečně, protože je (podle pravidla pro derivaci součinu)

$$\begin{aligned} u\,.\,x = y \qquad &\Rightarrow \qquad u'\,.\,x + u = y' \qquad \Rightarrow \qquad u'\,.\,x + u = f(u) \\ &\Rightarrow \qquad \frac{du}{dx}\,x = f(u) - u \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{f(u) - u}\,du = \frac{1}{x}\,dx \end{aligned}$$

a poslední uvedená rovnice má separované proměnné (x a u).

Příklad

Vyřešte diferenciální rovnici

$$y' = 1 + \frac{y}{x}.$$

Příklad

Vyřešte diferenciální rovnici

$$y' = 1 + \frac{y}{x}.$$

Řešení

Volbou $u = \frac{y}{x}$, neboli $y = u \,.\, x$, dostaneme $y' = u' \,.\, x + u$ a po desazení do rovnice

$$u' \,.\, x + u = 1 + u \quad \Rightarrow \quad u' \,.\, x = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} \,.\, x = 1$$
$$\Rightarrow \quad du = \frac{1}{x}\, dx \quad \Rightarrow \quad \int du = \int \frac{1}{x}\, dx \quad \Rightarrow \quad u = \ln|x| + C.$$

Zpětným dosazením za proměnnou u pak dostaneme hledané řešení

$$\frac{y}{x} = \ln|x| + C \qquad \Rightarrow \qquad y = x \ln|x| + C\,x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Jedná se o rovnici tvaru

$$y' = a(x)\, y + b(x)$$

tj. pravá strana z obecné rovnice je $F(x, y) = a(x)\, y + b(x)$, tj. je to *lineární* funkce vzhledem k proměnné y.

Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Jedná se o rovnici tvaru

$$y' = a(x)\,y + b(x)$$

tj. pravá strana z obecné rovnice je $F(x, y) = a(x)\,y + b(x)$, tj. je to *lineární* funkce vzhledem k proměnné y.
Lineární diferenciální rovnici lze jednoduchým způsobem vyřešit.

homogenní rovnice

Rovnice je tzv. *homogenní*, tj. $b(x) \equiv 0$. Potom se jedná o rovnici $y' = a(x)\,y$, což je rovnice se separovanými proměnnými

$$\frac{dy}{dx} = a(x)\,y \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y}\,dy = a(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{y}\,dy = \int a(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \int a(x)\,dx + C \quad \Rightarrow \quad |y| = e^{\int a(x)\,dx + C} = e^{\int a(x)\,dx} \,.\, e^C$$

$$\Rightarrow \pm y = e^{\int a(x)\,dx} \,.\, e^C \quad \Rightarrow \quad y = e^{\int a(x)\,dx} \,.\, \underbrace{\left(\pm\, e^C\right)}_{\text{lib. konst.}}$$

nehomogenní rovnice

Rovnice je tzv. *nehomogenní*, tj. $b(x) \not\equiv 0$. V tomto případě se nejprve celá rovnice vynásobí vhodnou funkcí $\mu(x)$ (tzv. *integračním faktorem*), aby po úpravách vznikl výraz pro derivaci součinu. Integrační faktor je funkce

$$\mu(x) := e^{-\int a(x)\,dx}.$$

nehomogenní rovnice

Rovnice je tzv. *nehomogenní*, tj. $b(x) \not\equiv 0$. V tomto případě se nejprve celá rovnice vynásobí vhodnou funkcí $\mu(x)$ (tzv. *integračním faktorem*), aby po úpravách vznikl výraz pro derivaci součinu. Integrační faktor je funkce

$$\mu(x) := e^{-\int a(x)\, dx}.$$

Tedy platí

$$\begin{aligned}
y' - a(x)\, y = b(x) \quad &\Rightarrow \quad \big[y' - a(x)\, y\big] \,.\, \mu(x) = b(x) \,.\, \mu(x) \\
\Rightarrow \quad & \underbrace{y' \,.\, e^{-\int a(x)\, dx} - y\, a(x) \,.\, e^{-\int a(x)\, dx}}_{\left(y \,.\, e^{-\int a(x)\, dx}\right)'} = b(x) \,.\, e^{-\int a(x)\, dx} \\
\Rightarrow \quad & y \,.\, e^{-\int a(x)\, dx} = \int b(x) \,.\, e^{-\int a(x)\, dx}\, dx + C \\
\Rightarrow \quad & y = e^{\int a(x)\, dx} \left[\int b(x) \,.\, e^{-\int a(x)\, dx}\, dx + C \right], \qquad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Věta (O řešitelnosti lineární diferenciální rovnice 1. řádu)

Jsou-li koeficienty $a(x)$ a $b(x)$ spojité funkce na intervalu (a, b), potom má počáteční úloha

$$y' = a(x)\,y + b(x), \qquad y(x_0) = y_0$$

právě jedno řešení, které je na celém intervalu (a, b) definováno předchozím vztahem. Konstanta C se určí z počáteční podmínky $y(x_0) = y_0$.

Věta (O řešitelnosti lineární diferenciální rovnice 1. řádu)

Jsou-li koeficienty $a(x)$ a $b(x)$ spojité funkce na intervalu (a, b), potom má počáteční úloha

$$y' = a(x)\, y + b(x), \qquad y(x_0) = y_0$$

právě jedno řešení, které je na celém intervalu (a, b) definováno předchozím vztahem. Konstanta C se určí z počáteční podmínky $y(x_0) = y_0$.

Vidíme tedy, že na rozdíl od nelineárních rovnic, které mají zaručenu existenci a jednoznačnost řešení pouze na okolí bodu x_0, jsou lineární diferenciální rovnice jednoznačně řešitelné na celém intervalu spojitosti pravé strany rovnice.

Příklad

Vyřešte diferenciální rovnici

$$y' = -3y + x.$$

Příklad

Vyřešte diferenciální rovnici

$$y' = -3y + x.$$

Řešení

Protože je $y' + 3y = x$, je integrační faktor

$$\mu(x) = e^{\int 3\,dx} = e^{3x}.$$

Potom platí

$$y'\,e^{3x} + 3y\,e^{3x} = x\,e^{3x} \quad \Rightarrow \quad \left(y\,.\,e^{3x}\right)' = x\,e^{3x}$$

$$\Rightarrow y\,.\,e^{3x} = \int x\,e^{3x}\,dx + C \quad \left|\begin{array}{ll} u' = e^{3x} & u = \frac{e^{3x}}{3} \\ v = x & v' = 1 \end{array}\right|$$

$$= \frac{1}{3}\,x\,e^{3x} - \frac{1}{9}\,e^{3x} + C \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{3}\,x - \frac{1}{9} + C\,e^{-3x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Bernoulliova rovnice

Některé další typy rovnic lze jednoduchou substitucí převést na rovnici lineární. Například tzv. *Bernoulliova rovnice*

$$y' = a(x)\,y + b(x)\,y^r$$

se pomocí substituce $u = y^{1-r}$ (Pozor, $u = u(x)$ je funkce proměnné x!) převede na rovnici lineární.

Příklad

Vyřešte diferenciální rovnici

$$y' = -3y + x\,y^2.$$

Řešení (Bernoulliova rovnice)

Jedná se zřejmě o Bernoulliovu rovnici s $r = 2$. Substitucí $u = y^{-1} = \frac{1}{y}$ dostaneme $u' = -y^{-2}y' = \frac{y'}{y^2}$ a tedy se daná rovnice převede na tvar

$$y' = -3y + x\,y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y^2} = -3\,\frac{1}{y} + x \quad \Rightarrow \quad u' = -3u + x.$$

Poslední rovnice je lineární diferenciální rovnice pro neznámou funkci $u(x)$. Z dřívějšího příkladu víme, že její řešení je funkce

$$u = \frac{1}{3}\,x - \frac{1}{9} + C\,e^{-3x}.$$

Zpětným dosazením za funkci u pak dostaneme řešení původní rovnice

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{3}\,x - \frac{1}{9} + C\,e^{-3x} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{\frac{1}{3}\,x - \frac{1}{9} + C\,e^{-3x}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Dalším trikem, který někdy může pomoci převést danou rovnici na lineární diferenciální rovnici, je záměna nezávislé a závislé proměnné x a y. Tedy místo hledání řešení jako funkce $y = y(x)$ jej budeme hledat jako funkci $x = x(y)$. Výsledkem potom zřejmě bude řešení zadané pomocí inverzní funkce.

Příklad

Vyřešte diferenciální rovnici

$$y' = \frac{1}{y^2 - 2x}.$$

Řešení

Tato rovnice není lineární diferenciální rovnice. Platí ale

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y^2 - 2x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = -2x + y^2,$$

přičemž poslední rovnice už je lineární diferenciální rovnice pro neznámou funkci $x = x(y)$. Tuto rovnici vyřešíme metodou integračního faktoru, tj. $\mu(y) = e^{2y}$. Řešení je potom tvaru (po dvojnásobné integraci per-partes v integrálu $\int y^2\, e^{2y}\, dy$)

$$x = \frac{1}{2}\, y^2 - \frac{1}{2}\, y + \frac{1}{4} + C\, e^{-2y}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Řešení nehomogenních rovnic metodou variace konstanty

V případě nehomogenní rovnice lze postupovat kromě metody *integračního faktoru* rovněž (obecněji použitelnější) metodou *variace konstanty*:

Variace konstanty

- Nejprve vyřešíme přidruženou homogenní rovnici.
- Variace konstanty spočívá v nahrazení konstanty v řešení přidružené rovnice funkční proměnnou, tj. hledáme řešení ve tvaru $y = C(x) \cdot e^{\int a(x)\,dx}$.
- Po dosazení do původní rovnice dostaneme $C'(x) \cdot e^{\int a(x)\,dx} = b(x)$.
- Odtud dostaneme řešení $C(x) = \int b(x) \cdot e^{-\int a(x)\,dx}\,dx$.

Řešení nehomogenních rovnic metodou variace konstanty

V případě nehomogenní rovnice lze postupovat kromě metody *integračního faktoru* rovněž (obecněji použitelnější) metodou *variace konstanty*:

Variace konstanty

- Nejprve vyřešíme přidruženou homogenní rovnici.
- Variace konstanty spočívá v nahrazení konstanty v řešení přidružené rovnice funkční proměnnou, tj. hledáme řešení ve tvaru $y = C(x) \cdot e^{\int a(x)\, dx}$.
- Po dosazení do původní rovnice dostaneme $C'(x) \cdot e^{\int a(x)\, dx} = b(x)$.
- Odtud dostaneme řešení $C(x) = \int b(x) \cdot e^{-\int a(x)\, dx}\, dx$.

Poznamenejme, že v obou případech zřejmě počítáme tytéž integrály, takže z výpočetního hlediska jsou oba postupy ekvivalentní.

Plán přednášky

Aplikace lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu

Radioaktivní rozpad

Radioaktivní materiál se rozpadá rychlostí, která je přímo úměrná množství přítomného materiálu.

Aplikace lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu

Radioaktivní rozpad

Radioaktivní materiál se rozpadá rychlostí, která je přímo úměrná množství přítomného materiálu. Tedy označíme-li jako $Q(t)$ množství [většinou gramů] radioaktivního materiálu v čase t [roků], potom musí platit rovnice

$$Q'(t) = -r\,Q(t), \quad \text{kde } r > 0 \text{ je konstanta úměrnosti.}$$

Všimněte si, že materiálu zřejmě ubývá, tj. $Q' < 0$.

Aplikace lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu

Radioaktivní rozpad

Radioaktivní materiál se rozpadá rychlostí, která je přímo úměrná množství přítomného materiálu. Tedy označíme-li jako $Q(t)$ množství [většinou gramů] radioaktivního materiálu v čase t [roků], potom musí platit rovnice

$$Q'(t) = -r\,Q(t), \quad \text{kde } r > 0 \text{ je konstanta úměrnosti.}$$

Všimněte si, že materiálu zřejmě ubývá, tj. $Q' < 0$.

Příklad

Rádium–226 má poločas rozpadu 1620 let. Najděte čas potřebný k tomu, aby se dané množství Ra–226 zmenšilo na $\frac{3}{4}$ původního množství.

Řešení

Označíme-li jako $Q(0) := Q_0$ původní množství Ra–226, potom pro hledanou funkci $Q(t)$, která splňuje (homogenní) lineární diferenciální rovnici $Q' = -r\,Q$, platí (viz dříve)

$$Q(t) = C\,e^{-rt} \Rightarrow Q(0) = C\,e^{0} = C \Rightarrow C = Q_0 \Rightarrow Q(t) = Q_0\,e^{-rt}.$$

Nyní určíme konstantu r z informace o poločasu rozpadu:

$$\frac{1}{2}\,Q_0 = Q_0\,e^{-r\,.\,1620} \Rightarrow \ln\frac{1}{2} = -r\,.\,1620 \Rightarrow r = \frac{-\ln\frac{1}{2}}{1620} \approx 0.000428\ [\text{let}^{-1}]$$

A nyní určíme hodnotu t, pro kterou je $Q(t) = \frac{3}{4}\,Q_0$:

$$\frac{3}{4}\,Q_0 = Q_0\,e^{-rt} \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{3}{4} = -rt \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln\frac{3}{4}}{-r} \approx 672.4\ [\text{let}].$$

Výměna tepla mezi tělesem a okolím

Povrchová teplota tělesa se mění rychlostí, která je přímo úměrná rozdílu teploty tělesa a okolního prostředí (tzv. Newtonův teplotní zákon).

Výměna tepla mezi tělesem a okolím

Povrchová teplota tělesa se mění rychlostí, která je přímo úměrná rozdílu teploty tělesa a okolního prostředí (tzv. Newtonův teplotní zákon). Označme teplotu tělesa v čase t jako $\Theta(t)$ [°C] a teplotu okolního prostředí jako T [°C]. Potom musí platit rovnice

$$\Theta'(t) = -k\,[\Theta(t) - T], \qquad \text{kde } k > 0 \text{ je konstanta úměrnosti.}$$

Všimněte si, že pokud bude teplota okolního prostředí *vyšší*, než je teplota tělesa (tj. pokud je $\Theta(t) < T$), potom je $\Theta' > 0$ a těleso se bude zahřívat. Zatímco pokud bude teplota okolního prostředí *nižší*, než je teplota tělesa (tj. pokud $\Theta(t) > T$), potom je $\Theta' < 0$ a těleso se bude ochlazovat.

Výměna tepla mezi tělesem a okolím

Povrchová teplota tělesa se mění rychlostí, která je přímo úměrná rozdílu teploty tělesa a okolního prostředí (tzv. Newtonův teplotní zákon). Označme teplotu tělesa v čase t jako $\Theta(t)$ [°C] a teplotu okolního prostředí jako T [°C]. Potom musí platit rovnice

$$\Theta'(t) = -k\,[\Theta(t) - T], \qquad \text{kde } k > 0 \text{ je konstanta úměrnosti.}$$

Všimněte si, že pokud bude teplota okolního prostředí *vyšší*, než je teplota tělesa (tj. pokud je $\Theta(t) < T$), potom je $\Theta' > 0$ a těleso se bude zahřívat. Zatímco pokud bude teplota okolního prostředí *nižší*, než je teplota tělesa (tj. pokud $\Theta(t) > T$), potom je $\Theta' < 0$ a těleso se bude ochlazovat.

Příklad (Detektivní kancelář)

Je nalezena mrtvola, jejíž teplota je změřena na 26.6 °C. O 3 hodiny později je její teplota 21.1 °C, přičemž teplota okolí je 18.3 °C. Určete čas úmrtí.

Řešení

Při použití výše uvedeného značení (pro čas t v jednotkách [hodin]) máme $T = 18.3, \Theta(0) =$ 26.6 (teplota v čase nalezení mrtvoly), $\Theta(3) = 21.1$, přičemž funkce $\Theta(t)$ splňuje rovnici

$$\Theta' = -k\,(\Theta - T) \quad \Rightarrow \quad \Theta' = -k\,\Theta + k\,T.$$

Řešení

Při použití výše uvedeného značení (pro čas t v jednotkách [hodin]) máme $T = 18.3, \Theta(0) = 26.6$ (teplota v čase nalezení mrtvoly), $\Theta(3) = 21.1$, přičemž funkce $\Theta(t)$ splňuje rovnici

$$\Theta' = -k\,(\Theta - T) \quad \Rightarrow \quad \Theta' = -k\,\Theta + k\,T.$$

Poslední rovnice je lineární diferenciální rovnice pro neznámou funkci $\Theta(t)$. Tuto rovnici vyřešíme metodou integračního faktoru $\mu(t) = e^{kt}$ a dostaneme
$\Theta = T + C\,e^{-kt} = 18.3 + C\,e^{-kt}, \quad C \in \mathbb{R}.$
Konstanty C a k určíme z informací o počáteční teplotě a o teplotě v čase $t = 3$ [hodiny].

Řešení

$$26.6 = \Theta(0) = 18.3 + C\,e^0 = 18.3 + C \quad \Rightarrow \quad C = 8.3$$

a $\Theta = 18.3 + 8.3\,e^{-kt}$, a dále

$$21.1 = \Theta(3) = 18.3 + 8.3\,e^{-3k} \Rightarrow e^{-3k} = \frac{21.1 - 18.3}{8.3} \approx 0.337,$$

odkud $-3k = \ln 0.337 \Rightarrow k = -\frac{\ln 0.337}{3} \approx 0.362$. Tedy hledané řešení je funkce $\Theta(t) = 18.3 + 8.3\,e^{-0.362t}$.

Řešení

$$26.6 = \Theta(0) = 18.3 + C\,e^0 = 18.3 + C \quad \Rightarrow \quad C = 8.3$$

a $\Theta = 18.3 + 8.3\,e^{-kt}$, a dále

$$21.1 = \Theta(3) = 18.3 + 8.3\,e^{-3k} \Rightarrow e^{-3k} = \frac{21.1 - 18.3}{8.3} \approx 0.337,$$

odkud $-3k = \ln 0.337 \Rightarrow k = -\frac{\ln 0.337}{3} \approx 0.362$. Tedy hledané řešení je funkce $\Theta(t) = 18.3 + 8.3\,e^{-0.362t}$.
Jak se určí čas úmrtí? Určíme čas t, pro který je $\Theta(t) = 37\ {}^\circ\mathrm{C}$ (teplota lidského těla). Tedy

$$18.3 + 8.3\,e^{-0.362t} = 37 \quad \Rightarrow \quad e^{-0.362t} = \frac{37 - 18.3}{8.3} \approx 2.253.$$

Odtud $-0.362t = \ln 2.253$ a $t = -\frac{\ln 2.253}{0.362} \approx -2.24$ a mrtvola tedy byla nalezena přibližně 2 hodiny a 15 minut po smrti.

Příklad (Míchání roztoku)

Vodní nádrž o celkovém objemu $L = 1000$ [litrů] obsahuje $Q_0 = 0$ [gramů] soli v počátečním čase $t_0 = 0$ [minut]. Do nádrže přitéká roztok o koncentraci soli $c = 50$ [gramů/litr] rychlostí $v = 20$ [litrů/min] a po řádném promíchání s vodou v nádrži z ní vytéká stejnou rychlostí (viz obr.). Určete množství soli $Q(t)$ v nádrži v libovolném čase t a limitní množství pro $t \to \infty$.

Příklad (Míchání roztoku)

Vodní nádrž o celkovém objemu $L = 1000$ [litrů] obsahuje $Q_0 = 0$ [gramů] soli v počátečním čase $t_0 = 0$ [minut]. Do nádrže přitéká roztok o koncentraci soli $c = 50$ [gramů/litr] rychlostí $v = 20$ [litrů/min] a po řádném promíchání s vodou v nádrži z ní vytéká stejnou rychlostí (viz obr.). Určete množství soli $Q(t)$ v nádrži v libovolném čase t a limitní množství pro $t \to \infty$.

Řešení

Označili jsme jako $Q(t)$ [g] množství soli v nádrži v libovolném čase t [min]. Potom $Q'(t)$ udává, jak rychle se toto množství mění a přitom musí platit, že

$$Q'(t) = \left(\begin{array}{c} \text{rychlost, s jakou sůl} \\ \text{do nádrže přitéká} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{rychlost, s jakou sůl} \\ \text{z nádrže vytéká} \end{array} \right).$$

Řešení (pokr.)

Sůl do nádrže *přitéká* rychlostí

$$c \,.\, v = 50 \;\; [\mathrm{g/l}] \;\; . \; 20 \;\; [\mathrm{l/min}] \;\; = 1000 \;\; [\mathrm{g/min}].$$

A protože v nádrži je vždy koncentrace soli rovna $\frac{Q(t)}{L} = \frac{Q(t)}{1000}$ [g/l], sůl z nádrže *vytéká* rychlostí

$$\frac{Q(t)}{L} \,.\, v = \frac{Q(t)}{1000} \;\; [\mathrm{g/l}] \;\; . \; 20 \;\; [\mathrm{l/min}] \;\; = \frac{Q(t)}{50} \;\; [\mathrm{g/min}].$$

Tedy hledaná funkce $Q(t)$ splňuje rovnici

$$Q'(t) = c \,.\, v - \frac{Q(t)}{L} \,.\, v \qquad \Rightarrow \qquad Q' = 1000 - \frac{Q}{50},$$

což je lineární diferenciální rovnice 1. řádu, a dále splňuje počáteční podmínku $Q(t_0) = Q_0 \qquad \Rightarrow \qquad Q(0) = 0.$

Řešení (pokr.)

Uvedenou rovnici vyřešíme např. metodou integračního faktoru a dostaneme

$$Q = c\,L + C\,e^{-\frac{v}{L}\,t} \qquad \Rightarrow \qquad Q = 50000 + C\,e^{-0.02\,t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Z počáteční podmínky $Q_0 = 0$ dostaneme

$$C = (Q_0 - c\,L)\,e^{\frac{v}{L}\,t_0} \qquad \Rightarrow \qquad C = -50000,$$

a tedy výsledné partikulární řešení (udávající kolik gramů soli bude v nádrži v okamžiku t minut) je tvaru

$$Q = c\,L + (Q_0 - c\,L)\,e^{\frac{v}{L}\,t_0}\,e^{-\frac{v}{L}\,t} \quad \Rightarrow \quad Q = 50000(1 - \;e^{-0.02\,t}).$$

Řešení (pokr.)

Uvedenou rovnici vyřešíme např. metodou integračního faktoru a dostaneme

$$Q = c\,L + C\,e^{-\frac{v}{L}\,t} \qquad \Rightarrow \qquad Q = 50000 + C\,e^{-0.02\,t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Z počáteční podmínky $Q_0 = 0$ dostaneme

$$C = (Q_0 - c\,L)\,e^{\frac{v}{L}\,t_0} \qquad \Rightarrow \qquad C = -50000,$$

a tedy výsledné partikulární řešení (udávající kolik gramů soli bude v nádrži v okamžiku t minut) je tvaru

$$Q = c\,L + (Q_0 - c\,L)\,e^{\frac{v}{L}\,t_0}\,e^{-\frac{v}{L}\,t} \quad \Rightarrow \quad Q = 50000(1 - e^{-0.02\,t}).$$

Tedy v závislosti na tom, jestli je $Q_0 > c\,L$ nebo $Q_0 < c\,L$, množství soli v nádrži (záporně exponenciálně) klesá nebo roste, a při $Q_0 = c\,L$ zůstává stále stejné.

Řešení (dokončení)

Pro $t \to \infty$ je potom

$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = \lim_{t\to\infty} \left\{ c\,L + (Q_0 - c\,L)\, \underbrace{e^{-\frac{v}{L}(t-t_0)}}_{\to 0} \right\} \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = c\,L \quad [\mathrm{g}] \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{t\to\infty} Q(t) = 50000 \quad [\mathrm{g}]\ .$$

Po dostatečně dlouhé době bude tedy koncentrace soli v nádrži rovna

$$Q_\infty = \frac{c\,L}{L} = c \quad [\mathrm{g/l}], \qquad \text{neboli} \qquad Q_\infty = \frac{50000}{1000} = 50 \quad [\mathrm{g/l}],$$

což je přesně koncentrace přítékajícího roztoku (samozřejmě, po „nekonečně dlouhé době“ přitékající roztok „nahradí“ původní roztok v nádrži, přičemž vůbec nezáleží na původním množství Q_0, tj. na tom, kolik soli bylo v nádrži na počátku).