

Matematika II – 14. přednáška

Závěrečné shrnutí

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

21. 12. 2011

Obsah přednášky

- 1 Diferenciální rovnice – dokončení
- 2 Závěrečné shrnutí

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, e-text.
- Roman Hilscher – MB102, e-text.

Lineární diferenciální rovnice 2. řádu

Lineární diferenciální rovnice 2. řádu je rovnice tvaru

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x),$$

kde funkce $a, b, c, f : I \rightarrow \mathbb{R}$ jsou koeficienty v této rovnici.

Lineární diferenciální rovnice 2. řádu mají podobné vlastnosti jako lineární rovnice 1. řádu, zejména jejich řešení existují a jsou určena jednoznačně pomocí dvou počátečních podmínek

$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$, tj. je zadána hodnota funkce a její derivace (neboli bod v rovině, kterým musí řešení projít, a pak sklon, pod kterým musí řešení tímto bodem projít).

Lineární diferenciální rovnice 2. řádu

Lineární diferenciální rovnice 2. řádu je rovnice tvaru

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x),$$

kde funkce $a, b, c, f : I \rightarrow \mathbb{R}$ jsou koeficienty v této rovnici.

Lineární diferenciální rovnice 2. řádu mají podobné vlastnosti jako lineární rovnice 1. řádu, zejména jejich řešení existují a jsou určena jednoznačně pomocí dvou počátečních podmínek

$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$, tj. je zadána hodnota funkce a její derivace (neboli bod v rovině, kterým musí řešení projít, a pak sklon, pod kterým musí řešení tímto bodem projít).

O těchto rovnicích existuje velké množství literatury, obvykle se studují zejména rovnice s konstantními koeficienty

$$ay'' + by' + cy = f(x),$$

které mají mnoho aplikací např. při modelování mechanického a elektromagnetického kmitání.

Pro ilustraci uveďme lineární diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními koeficienty, kterou vyřešíme (bez jakýchkoliv dalších znalostí teorie diferenciálních rovnic) pomocí nekonečných řad.

Příklad

Vyřešte diferenciální rovnici $y'' + y = 0$ pomocí nekonečných řad.

Pro ilustraci uveďme lineární diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními koeficienty, kterou vyřešíme (bez jakýchkoliv dalších znalostí teorie diferenciálních rovnic) pomocí nekonečných řad.

Příklad

Vyřešte diferenciální rovnici $y'' + y = 0$ pomocí nekonečných řad.

Řešení

Hledejme řešení této rovnice ve tvaru mocninné řady

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Potom podle pravidla pro derivaci mocninné řady platí

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) x^n,$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (n+2)(n+1) x^n.$$

Řešení (pokr.)

Dosazením do rovnice $y'' + y = 0$ dostáváme

$$\begin{aligned} 0 &= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (n+2)(n+1) x^n}_{y''} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}_y = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [a_{n+2} (n+2)(n+1) + a_n] x^n \end{aligned}$$

Řešení (pokr.)

Dosazením do rovnice $y'' + y = 0$ dostáváme

$$\begin{aligned} 0 &= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (n+2)(n+1) x^n}_{y''} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}_y = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [a_{n+2} (n+2)(n+1) + a_n] x^n \end{aligned}$$

Tedy poslední uvedená řada je mocninná řada pro konstantní funkci $s(x) \equiv 0$, a proto musí všechny její koeficienty být nulové, tj.

$$a_{n+2} (n+2)(n+1) + a_n = 0 \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Řešení

Odtud vychází rekurentní vztah pro jednotlivé koeficienty

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)(n+1)} \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Tedy jsou-li koeficienty a_0 a a_1 dány (všimněte si, že $a_0 = y(0)$ a $a_1 = y'(0)$), tj. tyto koeficienty jsou dány počátečními podmínkami ve středu hledané mocninné řady), potom je

$$a_2 = -\frac{a_0}{2},$$

$$a_3 = -\frac{a_1}{3 \cdot 2},$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4 \cdot 3} = \frac{a_0}{4!},$$

$$a_5 = -\frac{a_3}{5 \cdot 4} = \frac{a_1}{5!},$$

$$\vdots$$
$$\vdots$$

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{(2k)!},$$

$$a_{2k+1} = (-1)^k \frac{a_1}{(2k+1)!}.$$

Řešení (dokončení)

Celkově je tedy hledané řešení tvaru

$$\begin{aligned}
 y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2!} x^2 - \frac{a_1}{3!} x^3 + \frac{a_0}{4!} x^4 + \frac{a_1}{5!} x^5 + \dots \\
 &= a_0 \left\{ 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \dots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k} + \dots \right\} \\
 &+ a_1 \left\{ x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \dots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \dots \right\} \\
 &= a_0 \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k} \right\} + a_1 \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right\}.
 \end{aligned}$$

Řešení (dokončení)

Celkově je tedy hledané řešení tvaru

$$\begin{aligned}
 y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2!} x^2 - \frac{a_1}{3!} x^3 + \frac{a_0}{4!} x^4 + \frac{a_1}{5!} x^5 + \dots \\
 &= a_0 \left\{ 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \dots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k} + \dots \right\} \\
 &+ a_1 \left\{ x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \dots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \dots \right\} \\
 &= a_0 \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k} \right\} + a_1 \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right\}.
 \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že hledané obecné řešení je lineární kombinací dvou funkcí, přičemž uvedené mocninné řady konvergují pro všechna $x \in \mathbb{R}$ (jejich poloměr konvergence je $R = \infty$). Neboli obecné řešení uvedené diferenciální rovnice je (pro $C := a_0$ a $D := a_1$) rovno $y = C \cos x + D \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, $C, D \in \mathbb{R}$.

Plán přednášky

- 1 Diferenciální rovnice – dokončení
- 2 Závěrečné shrnutí

Závěrečné shrnutí

- 1 Polynomiální interpolace a extrapolace, splajny, aproximace metodou nejmenších čtverců.

Metoda nejmenších čtverců – flashback Hledáme funkci tvaru $f(x) = a \cdot x + b$ s neznámými $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby hodnota

$$\sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2$$

byla minimální.

Metoda nejmenších čtverců – flashback Hledáme funkci tvaru $f(x) = a \cdot x + b$ s neznámými $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby hodnota

$$\sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2$$

byla minimální.

Následující tvrzení lze snadno odvodit pomocí metody na nalezení extrému funkce dvou proměnných (tato metoda je analogií pro hledání extrému funkce jedné proměnné, přesněji viz MB103).

Věta

Mezi přímkami tvaru $f(x) = a \cdot x + b$ má nejmenší součet čtverců vzdáleností funkčních hodnot v bodech x_1, \dots, x_n od hodnot y_i funkce splňující

$$a \sum x_i^2 + b \sum x_i = \sum x_i y_i$$

$$a \sum x_i + b \cdot n = \sum y_i$$

Závěrečné shrnutí

- 1 Polynomiální interpolace a extrapolace, splajny, aproximace metodou nejmenších čtverců.
- 2 Reálná čísla, infima, suprema, limita posloupnosti a funkce, spojitost.

Závěrečné shrnutí

- 1 Polynomiální interpolace a extrapolace, splajny, aproximace metodou nejmenších čtverců.
- 2 Reálná čísla, infima, suprema, limita posloupnosti a funkce, spojitost.
- 3 Exponenciální a logaritmická funkce – způsob definice (přírůstky do zoo).

Závěrečné shrnutí

- 1 Polynomiální interpolace a extrapolace, splajny, aproximace metodou nejmenších čtverců.
- 2 Reálná čísla, infima, suprema, limita posloupnosti a funkce, spojitost.
- 3 Exponenciální a logaritmická funkce – způsob definice (přírůstky do zoo).
- 4 Derivace funkce, diferencovatelné funkce, pravidla, inverzní funkce, implicitně definovaná funkce, průběh funkce, úlohy na hledání extrémů.

Závěrečné shrnutí

- 1 Polynomiální interpolace a extrapolace, splajny, aproximace metodou nejmenších čtverců.
- 2 Reálná čísla, infima, suprema, limita posloupnosti a funkce, spojitost.
- 3 Exponenciální a logaritmická funkce – způsob definice (přírůstky do zoo).
- 4 Derivace funkce, diferencovatelné funkce, pravidla, inverzní funkce, implicitně definovaná funkce, průběh funkce, úlohy na hledání extrémů.
- 5 Aproximace – diferenciál, Taylorův polynom.

Závěrečné shrnutí

- 1 Polynomiální interpolace a extrapolace, splajny, aproximace metodou nejmenších čtverců.
- 2 Reálná čísla, infima, suprema, limita posloupnosti a funkce, spojitost.
- 3 Exponenciální a logaritmická funkce – způsob definice (přírůstky do zoo).
- 4 Derivace funkce, diferencovatelné funkce, pravidla, inverzní funkce, implicitně definovaná funkce, průběh funkce, úlohy na hledání extrémů.
- 5 Aproximace – diferenciál, Taylorův polynom.
- 6 Primitivní funkce – metody výpočtu.

Závěrečné shrnutí

- 1 Polynomiální interpolace a extrapolace, splajny, aproximace metodou nejmenších čtverců.
- 2 Reálná čísla, infima, suprema, limita posloupnosti a funkce, spojitost.
- 3 Exponenciální a logaritmická funkce – způsob definice (přírůstky do zoo).
- 4 Derivace funkce, diferencovatelné funkce, pravidla, inverzní funkce, implicitně definovaná funkce, průběh funkce, úlohy na hledání extrémů.
- 5 Aproximace – diferenciál, Taylorův polynom.
- 6 Primitivní funkce – metody výpočtu.
- 7 Riemannův integrál, jeho vlastnosti a aplikace.

Závěrečné shrnutí

- 1 Polynomiální interpolace a extrapolace, splajny, aproximace metodou nejmenších čtverců.
- 2 Reálná čísla, infima, suprema, limita posloupnosti a funkce, spojitost.
- 3 Exponenciální a logaritmická funkce – způsob definice (přírůstky do zoo).
- 4 Derivace funkce, diferencovatelné funkce, pravidla, inverzní funkce, implicitně definovaná funkce, průběh funkce, úlohy na hledání extrémů.
- 5 Aproximace – diferenciál, Taylorův polynom.
- 6 Primitivní funkce – metody výpočtu.
- 7 Riemannův integrál, jeho vlastnosti a aplikace.
- 8 Nekonečné řady – kritéria a typy konvergence.

Závěrečné shrnutí

- 1 Polynomiální interpolace a extrapolace, splajny, aproximace metodou nejmenších čtverců.
- 2 Reálná čísla, infima, suprema, limita posloupnosti a funkce, spojitost.
- 3 Exponenciální a logaritmická funkce – způsob definice (přírůstky do zoo).
- 4 Derivace funkce, diferencovatelné funkce, pravidla, inverzní funkce, implicitně definovaná funkce, průběh funkce, úlohy na hledání extrémů.
- 5 Aproximace – diferenciál, Taylorův polynom.
- 6 Primitivní funkce – metody výpočtu.
- 7 Riemannův integrál, jeho vlastnosti a aplikace.
- 8 Nekonečné řady – kritéria a typy konvergence.
- 9 Posloupnosti a řady funkcí, stejnoměrná spojitosti, Taylorovy a Fourierovy řady, jejich využití při aproximaci.

Závěrečné shrnutí

- 1 Polynomiální interpolace a extrapolace, splajny, aproximace metodou nejmenších čtverců.
- 2 Reálná čísla, infima, suprema, limita posloupnosti a funkce, spojitost.
- 3 Exponenciální a logaritmická funkce – způsob definice (přírůstky do zoo).
- 4 Derivace funkce, diferencovatelné funkce, pravidla, inverzní funkce, implicitně definovaná funkce, průběh funkce, úlohy na hledání extrémů.
- 5 Aproximace – diferenciál, Taylorův polynom.
- 6 Primitivní funkce – metody výpočtu.
- 7 Riemannův integrál, jeho vlastnosti a aplikace.
- 8 Nekonečné řady – kritéria a typy konvergence.
- 9 Posloupnosti a řady funkcí, stejnoměrná spojitosti, Taylorovy a Fourierovy řady, jejich využití při aproximaci.
- 10 Elementární diferenciální rovnice.