Matematika II – 5. přednáška
Derivace – průběh funkce, optimalizace

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

26. 10. 2011

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB102`, *e*-text.

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB102`, *e*-text.
- Zuzana Došlá, Jaromír Kuben – Diferenciální počet funkcí jedné proměnné, MU Brno, 2003, 215 s., ISBN 80-210-3121-2 (*rovněž na* `http://www.math.muni.cz/~dosla/download/skript.pdf`).

Plán přednášky

1. Průběh funkce
   - Konvexnost, konkávnost, inflexe
   - Asymptoty
   - Celkový průběh funkce
2. Optimalizace
3. Primitivní funkce
4. Základní integrační metody
   - Metoda per partes

Monotonie a extrémy

Definice

Funkce $f(x)$ je

- *rostoucí* (resp. *neklesající*) na intervalu I, pokud $f(x_1) < f(x_2)$ (resp. $f(x_1) \leq f(x_2)$) pro každé $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$,
- *klesající* (resp. *nerostoucí*)na intervalu I, pokud $f(x_1) > f(x_2)$ (resp. $f(x_1) \geq f(x_2)$) pro každé $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$,

Monotonie a extrémy

Definice

Funkce $f(x)$ je

- *rostoucí* (resp. *neklesající*) na intervalu I, pokud $f(x_1) < f(x_2)$ (resp. $f(x_1) \leq f(x_2)$) pro každé $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$,
- *klesající* (resp. *nerostoucí*)na intervalu I, pokud $f(x_1) > f(x_2)$ (resp. $f(x_1) \geq f(x_2)$) pro každé $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$,

Funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 \in D(f)$

- *lokální maximum*, pokud $f(x) \leq f(x_0)$ pro všechna x z nějakého okolí bodu x_0,
- *lokální minimum*, pokud $f(x) \geq f(x_0)$ pro všechna x z nějakého okolí bodu x_0.

Monotonie a extrémy

Definice

Funkce $f(x)$ je

- *rostoucí* (resp. *neklesající*) na intervalu I, pokud $f(x_1) < f(x_2)$ (resp. $f(x_1) \leq f(x_2)$) pro každé $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$,
- *klesající* (resp. *nerostoucí*)na intervalu I, pokud $f(x_1) > f(x_2)$ (resp. $f(x_1) \geq f(x_2)$) pro každé $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$,

Funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 \in D(f)$

- *lokální maximum*, pokud $f(x) \leq f(x_0)$ pro všechna x z nějakého okolí bodu x_0,
- *lokální minimum*, pokud $f(x) \geq f(x_0)$ pro všechna x z nějakého okolí bodu x_0.

Analogicky *ostré lokální maximum (minimum)*.

Podmínky monotonie

Věta

Nechť $f(x)$ má vlastní derivaci na otevřeném intervalu I. Potom platí následující.

1. *Funkce $f(x)$ je neklesající na intervalu I* $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0\ \forall x \in I$.

Podmínky monotonie

Věta

Nechť $f(x)$ má vlastní derivaci na otevřeném intervalu I. Potom platí následující.

1. *Funkce $f(x)$ je neklesající na intervalu I $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in I$.*
2. *Funkce $f(x)$ je rostoucí na intervalu I $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in I$, přičemž rovnost $f'(x) = 0$ neplatí na žádném podintervalu intervalu I.*

Podmínky monotonie

Věta

Nechť $f(x)$ má vlastní derivaci na otevřeném intervalu I. Potom platí následující.

1. *Funkce $f(x)$ je neklesající na intervalu I* $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0\ \forall x \in I$.
2. *Funkce $f(x)$ je rostoucí na intervalu I* $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0\ \forall x \in I$, *přičemž rovnost $f'(x) = 0$ neplatí na žádném podintervalu intervalu I.*
3. *Funkce $f(x)$ je nerostoucí na intervalu I* $\Leftrightarrow$ $f'(x) \leq 0\ \forall x \in I$.

Podmínky monotonie

Věta

Nechť $f(x)$ má vlastní derivaci na otevřeném intervalu I. Potom platí následující.

1. *Funkce $f(x)$ je neklesající na intervalu I* $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0\ \forall x \in I$.
2. *Funkce $f(x)$ je rostoucí na intervalu I* $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0\ \forall x \in I$, *přičemž rovnost $f'(x) = 0$ neplatí na žádném podintervalu intervalu I.*
3. *Funkce $f(x)$ je nerostoucí na intervalu I* $\Leftrightarrow$ $f'(x) \leq 0\ \forall x \in I$.
4. *Funkce $f(x)$ je klesající na intervalu I* $\Leftrightarrow$ $f'(x) \leq 0\ \forall x \in I$, *přičemž rovnost $f'(x) = 0$ neplatí na žádném podintervalu intervalu I.*

Body, kde $f'(x) = 0$, se nazývají *stacionární body* funkce $f(x)$.

Věta

Funkce $f(x)$ může mít lokální extrémy pouze ve svých stacionárních bodech nebo v bodech, kde $f'(x)$ neexistuje.

Body, kde $f'(x) = 0$, se nazývají *stacionární body* funkce $f(x)$.

Věta

Funkce $f(x)$ může mít lokální extrémy pouze ve svých stacionárních bodech nebo v bodech, kde $f'(x)$ neexistuje.

Věta

Nechť x_0 je stacionární bod funkce $f(x)$, tj. $f'(x_0) = 0$, a nechť existuje $f''(x_0)$.

1. *Je-li $f''(x_0) > 0$, potom je v bodě x_0 ostré lokální minimum.*
2. *Je-li $f''(x_0) < 0$, potom je v bodě x_0 ostré lokální maximum.*

Globální extrémy

Definice

Funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 \in \mathcal{D}(f)$

- *globální maximum na množině* $M \subseteq \mathcal{D}(f)$, pokud $f(x) \leq f(x_0)$ pro všechna $x \in M$,
- *globální minimum na množině* $M \subseteq \mathcal{D}(f)$, pokud $f(x) \geq f(x_0)$ pro všechna $x \in M$.

Poznámka

1. Místo *globální* max/min se také používá termín *absolutní* max/min.
2. Globální max/min nemusí být jediné. Např. funkce $f(x) = x^2$ na intervalu $[-1, 1]$ má globální max 1 v bodech $x = -1$ a $x = 1$, kdežto globální min 0 v bodě $x = 0$.
3. Globální max/min nemusí ani existovat.
4. Weierstrassova věta zaručuje existenci globálního max/min – za předpokladu spojitosti funkce $f(x)$ na intervalu $[a, b]$.
5. *Pokud víme*, že globální extrémy existují, potom musí tyto globální extrémy být
    - ve *stacionárních bodech*,
    - v bodech, kde neexistuje $f'(x)$,
    - nebo v *krajních bodech*

    daného intervalu. Nemusíme již pak určovat, jestli jsou ve stacionárních bodech lokální extrémy či nikoliv.

Poznámka

Z Poznámky (v) plyne postup pro nalezení globálních extrémů spojité funkce $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ (z Weierstrassovy věty víme, že globální max/min existuje):

- Najdeme stacionární body funkce $f(x)$ a body, kde neexistuje $f'(x)$.
- V těchto bodech a v krajních bodech intervalu určíme funkční hodnoty.
- Vybereme z nich max a min hodnotu.

Příklad

Určete globální extrémy funkce

$$f(x) = x - 1 - \sqrt{|x|}, \qquad \text{na intervalu } [-1, 1].$$

Příklad

Určete globální extrémy funkce

$$f(x) = x - 1 - \sqrt{|x|}, \qquad \text{na intervalu } [-1, 1].$$

Řešení

Protože je $f(x)$ spojitá na intervalu $[-1, 1]$, globální extrémy v tomto intervalu existují. Pro $x > 0$ je
$f(x) = x - 1 - \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$ a dostáváme stacionární bod $x = \frac{1}{4}$.

Příklad

Určete globální extrémy funkce

$$f(x) = x - 1 - \sqrt{|x|}, \qquad \text{na intervalu } [-1, 1].$$

Řešení

Protože je $f(x)$ spojitá na intervalu $[-1, 1]$, globální extrémy v tomto intervalu existují. Pro $x > 0$ je
$f(x) = x - 1 - \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$ a dostáváme stacionární bod $x = \frac{1}{4}$.
Pro $x < 0$ je $f(x) = x - 1 - \sqrt{-x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{-x}} \cdot (-1)$,
což není nulové pro žádné $x < 0$ (dokonce pro žádné $x \in \mathbb{R}$).
Vidíme, že $x = \frac{1}{4}$ je jediný stacionární bod a $x = 0$ je bod, kde neexistuje $f'(x)$ (v intervalu $[-1, 1]$).

Řešení (dokončení)

Máme tedy

$$
\begin{array}{llll}
\text{stac. body:} & x = \frac{1}{4}, & f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{4}, & \\
\nexists\ f'(x) & x = 0, & f(0) = -1, & \leftarrow \ \text{max} \\
\text{krajní body:} & x = -1, & f(-1) = -1 - 1 - 1 = -3, & \leftarrow \ \text{min} \\
 & x = 1, & f(1) = 1 - 1 - 1 = -1. & \leftarrow \ \text{max}
\end{array}
$$

Řešení (dokončení)

Máme tedy

$$\begin{array}{llll} \text{stac. body:} & x=\frac{1}{4}, & f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}-1-\frac{1}{2}=-\frac{5}{4}, & \\ \nexists\ f'(x) & x=0, & f(0)=-1, & \leftarrow\ \text{max} \\ \text{krajní body:} & x=-1, & f(-1)=-1-1-1=-3, & \leftarrow\ \text{min} \\ & x=1, & f(1)=1-1-1=-1. & \leftarrow\ \text{max} \end{array}$$

Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} &\text{globální min } -3 \text{ v bodě } x=-1,\\ &\text{globální max } -1 \text{ v bodech } x=0,\ x=1. \end{aligned}$$

Konvexnost,konkávnost, inflexe

Pojmy konvexnost, konkávnosti a inflexních bodů slouží ke studiu toho, jak daná funkce (či přesněji její graf) „zatáčí“. Tyto pojmy budeme uvažovat pouze pro diferencovatelné funkce.

Konvexnost,konkávnost, inflexe

Pojmy konvexnost, konkávnosti a inflexních bodů slouží ke studiu toho, jak daná funkce (či přesněji její graf) „zatáčí“. Tyto pojmy budeme uvažovat pouze pro diferencovatelné funkce.

Definice

Nechť má funkce $f(x)$ vlastní derivaci na intervalu $I \subseteq \mathcal{D}(f)$. Funkce $f(x)$ se nazývá

- *konvexní na intervalu I*, pokud je $f'(x)$ neklesající na I,
- *konkávní na intervalu I*, pokud je $f'(x)$ nerostoucí na I.

Poznámka

To, že funkce $f'(x)$ je neklesající na intervalu I (tj. $f(x)$ je *konvexní*), znamená, že tečny mají „neklesající směrnici", tj.

graf funkce $f(x)$ *zatáčí doleva* a tečny leží *pod grafem*.

To, že funkce $f'(x)$ je nerostoucí na intervalu I (tj. $f(x)$ je *konkávní*), znamená, že tečny mají „nerostoucí směrnici", tj.

graf funkce $f(x)$ *zatáčí doprava* a tečny leží *nad grafem*.

Příklad

1. Funkce $f(x) = x^2$ má derivaci $f'(x) = 2x$, což je funkce rostoucí (tudíž neklesající) na $\mathbb{R}$. A proto je x^2 konvexní na $\mathbb{R}$.

Příklad

1. Funkce $f(x) = x^2$ má derivaci $f'(x) = 2x$, což je funkce rostoucí (tudíž neklesající) na $\mathbb{R}$. A proto je x^2 konvexní na $\mathbb{R}$.
2. Funkce $f(x) = x^3$ má derivaci $f'(x) = 3x^2$, což je *na intervalu* $[0, \infty)$ funkce rostoucí (tudíž neklesající). A proto je x^3 konvexní na $[0, \infty)$.

Příklad

1. Funkce $f(x) = x^2$ má derivaci $f'(x) = 2x$, což je funkce rostoucí (tudíž neklesající) na $\mathbb{R}$. A proto je x^2 konvexní na $\mathbb{R}$.
2. Funkce $f(x) = x^3$ má derivaci $f'(x) = 3x^2$, což je *na intervalu* $[0, \infty)$ funkce rostoucí (tudíž neklesající). A proto je x^3 konvexní na $[0, \infty)$.
3. Funkce $f(x) = x^3$ má derivaci $f'(x) = 3x^2$, což je *na intervalu* $(-\infty, 0]$ funkce klesající (tudíž nerostoucí). A proto je x^3 konkávní na $(-\infty, 0]$.

Příklad

1. Funkce $f(x) = x^2$ má derivaci $f'(x) = 2x$, což je funkce rostoucí (tudíž neklesající) na $\mathbb{R}$. A proto je x^2 konvexní na $\mathbb{R}$.
2. Funkce $f(x) = x^3$ má derivaci $f'(x) = 3x^2$, což je *na intervalu* $[0, \infty)$ funkce rostoucí (tudíž neklesající). A proto je x^3 konvexní na $[0, \infty)$.
3. Funkce $f(x) = x^3$ má derivaci $f'(x) = 3x^2$, což je *na intervalu* $(-\infty, 0]$ funkce klesající (tudíž nerostoucí). A proto je x^3 konkávní na $(-\infty, 0]$.
4. Funkce $f(x) = ax + b$ má derivaci $f'(x) = a$, což je funkce konstantní (tudíž neklesající) na $\mathbb{R}$. A proto je $ax + b$ konvexní na $\mathbb{R}$. Současně je konstantní funkce $f'(x) = a$ nerostoucí na $\mathbb{R}$, a proto je $ax + b$ také konkávní na $\mathbb{R}$.

Konvexnost a druhá derivace

Věta

Nechť $I \subseteq \mathcal{D}(f)$ je otevřený interval a nechť má funkce $f(x)$ druhou derivaci $f''(x)$ na I.

(i) *Je-li $f''(x) > 0$ na I, potom je $f(x)$ konvexní na intervalu I.*

(ii) *Je-li $f''(x) < 0$ na I, potom je $f(x)$ konkávní na intervalu I.*

Konvexnost a druhá derivace

Věta

Nechť $I \subseteq \mathcal{D}(f)$ je otevřený interval a nechť má funkce $f(x)$ druhou derivaci $f''(x)$ na I.

(i) *Je-li $f''(x) > 0$ na I, potom je $f(x)$ konvexní na intervalu I.*

(ii) *Je-li $f''(x) < 0$ na I, potom je $f(x)$ konkávní na intervalu I.*

Důkaz.

ad (i): Je-li $f''(x) > 0$ na intervalu I, potom je funkce $f'(x)$ rostoucí na intervalu I. Tedy je přímo podle definice funkce $f(x)$ konvexní na intervalu I. $\square$

Inflexní bod

Tam, kde se mění konvexnost na konkávnost nebo naopak, se nacházejí tzv. inflexní body funkce.

Definice

Nechť má funkce $f(x)$ vlastní nebo nevlastní derivaci $f'(x_0)$. Je-li $f'(x_0)$ nevlastní, potom navíc předpokládejme, že je $f(x)$ spojitá v bodě x_0. Bod x_0 je *inflexní bod* funkce $f(x)$, pokud v nějakém levém okolí bodu x_0 je funkce $f(x)$ konvexní a v nějakém pravém okolí bodu x_0 je funkce $f(x)$ konkávní, nebo naopak.

Vlastnosti inflexních bodů

Věta

(i) *Pokud existuje vlastní druhá derivace* $f''(x_0) = 0$ *v inflexním bodě* x_0*, potom je* $f''(x_0) = 0$.

(ii) *Je-li* $f''(x_0) = 0$ *a* $f''(x)$ *mění znaménko v bodě* x_0*, potom je* x_0 *inflexní bod.*

(iii) *Je-li* $f''(x_0) = 0$ *a* $f'''(x_0) \neq 0$*, potom je* x_0 *inflexní bod.*

Vlastnosti inflexních bodů

Věta

(i) *Pokud existuje vlastní druhá derivace $f''(x_0) = 0$ v inflexním bodě x_0, potom je $f''(x_0) = 0$.*

(ii) *Je-li $f''(x_0) = 0$ a $f''(x)$ mění znaménko v bodě x_0, potom je x_0 inflexní bod.*

(iii) *Je-li $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$, potom je x_0 inflexní bod.*

Zejména část (ii) v předchozí větě ukazuje, jak inflexní body najít. Současně ze změny znaménka $f''(x)$ (tedy jestli se jedná o změnu z $\ominus$ do $\oplus$ nebo o změnu z $\oplus$ do $\ominus$) poznáme, kterým směrem graf funkce $f(x)$ v bodě x_0 „zatáčí“.

Příklad

Určete monotonii, lokální extrémy, konvexnost/konkávnost a inflexní body funkce

$$f(x) = x + \sin x \qquad \text{na intervalu } [0, 4\pi].$$

Příklad

Určete monotonii, lokální extrémy, konvexnost/konkávnost a inflexní body funkce

$$f(x) = x + \sin x \qquad \text{na intervalu } [0, 4\pi].$$

Řešení

$f'(x) = 1 + \cos x = 0$ implikuje, že $\cos x = -1$, tedy $x = \pi, 3\pi$ jsou *stacionární body* (v intervalu $[0, 4\pi]$). Body, kde neexistuje $f'(x)$ nejsou. V každém z intervalů $(0, \pi)$, $(\pi, 3\pi)$ a $(3\pi, 4\pi)$ vybereme jeden bod pro určení znaménka $f'(x)$ v těchto intervalech. Tedy

$$f(x) \text{ je rostoucí na } [0, 4\pi],$$
$$f(x) \text{ nemá lokální extrémy.}$$

Řešení příkladu – pokr.

Řešení

$f''(x) = -\sin x = 0$ implikuje, že $x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi$ jsou kandidáti na inflexní body. V každém z intervalů $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, $(2\pi, 3\pi)$ a $(3\pi, 4\pi)$ vybereme jeden bod pro určení znaménka $f''(x)$ v těchto intervalech. Tedy

$$\begin{gathered} f(x) \text{ je konvexní na } [\pi, 2\pi] \text{ a na } [3\pi, 4\pi], \\ f(x) \text{ je konkávní na } [0, \pi] \text{ a na } [2\pi, 3\pi], \\ f(x) \text{ má inflexi v bodech } x = \pi, 2\pi, 3\pi. \end{gathered}$$

A protože můžeme jednoduše vypočítat funkční hodnoty a hodnoty derivace (pro sklon tečny) ve zmiňovaných stacionárních, inflexních a krajních bodech, můžeme také načrtnout graf této funkce na intervalu $[0, 4\pi]$.

Asymptoty

Funkce $f(x)$ může mít jako asymptotu svislou přímku (asymptota bez směrnice) nebo přímku se směrnicí. Ve druhém případě pak rozlišujeme asymptoty v ∞ a v $-\infty$.

Asymptoty

Funkce $f(x)$ může mít jako asymptotu svislou přímku (asymptota bez směrnice) nebo přímku se směrnicí. Ve druhém případě pak rozlišujeme asymptoty v ∞ a v $-\infty$.

Definice

- Přímka $x = x_0$ (svislá přímka) je *asymptotou bez směrnice* funkce $f(x)$, pokud je alespoň jedna jednostranná limita v bodě x_0 nevlastní, tj.
  $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ nebo $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$.

Asymptoty

Funkce $f(x)$ může mít jako asymptotu svislou přímku (asymptota bez směrnice) nebo přímku se směrnicí. Ve druhém případě pak rozlišujeme asymptoty v ∞ a v $-\infty$.

Definice

- Přímka $x = x_0$ (svislá přímka) je *asymptotou bez směrnice* funkce $f(x)$, pokud je alespoň jedna jednostranná limita v bodě x_0 nevlastní, tj.
  $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ nebo $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty.$
- Přímka $y = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) je *asymptotou se směrnicí v* ∞, pokud
  $$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$
  Podobně pro asymptotu se směrnicí v $-\infty$.

Příklad

(a) Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ má asymptotu bez směrnice $x = 0$ a asymptotu se směrnicí $y = 0$ (v $\pm\infty$).

Příklad

(a) Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ má asymptotu bez směrnice $x = 0$ a asymptotu se směrnicí $y = 0$ (v $\pm\infty$).

(b) Funkce $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ má asymptotu se směrnicí $y = 0$ (v $\pm\infty$), protože

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\sin x}{x} - 0\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin x}{x} \quad \left|\ \text{typ } \frac{\text{ohr.}}{\pm\infty}\ \right| = 0.$$

Příklad

(a) Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ má asymptotu bez směrnice $x = 0$ a asymptotu se směrnicí $y = 0$ (v $\pm\infty$).

(b) Funkce $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ má asymptotu se směrnicí $y = 0$ (v $\pm\infty$), protože

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\sin x}{x} - 0\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin x}{x} \quad \left|\ \text{typ } \frac{\text{ohr.}}{\pm\infty}\ \right| = 0.$$

(c) Funkce $f(x) = ax + b$ je svou vlastní asymptotou (v $\pm\infty$).

Příklad

(a) Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ má asymptotu bez směrnice $x = 0$ a asymptotu se směrnicí $y = 0$ (v $\pm\infty$).

(b) Funkce $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ má asymptotu se směrnicí $y = 0$ (v $\pm\infty$), protože

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\sin x}{x} - 0\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin x}{x} \quad \left|\ \text{typ } \frac{\text{ohr.}}{\pm\infty}\ \right| = 0.$$

(c) Funkce $f(x) = ax + b$ je svou vlastní asymptotou (v $\pm\infty$).

Příklad

(a) Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ má asymptotu bez směrnice $x = 0$ a asymptotu se směrnicí $y = 0$ (v $\pm\infty$).

(b) Funkce $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ má asymptotu se směrnicí $y = 0$ (v $\pm\infty$), protože

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\sin x}{x} - 0\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin x}{x} \quad \left|\ \text{typ } \frac{\text{ohr.}}{\pm\infty}\ \right| = 0.$$

(c) Funkce $f(x) = ax + b$ je svou vlastní asymptotou (v $\pm\infty$).

Poznámka

Je zřejmé, že asymptoty bez směrnice mohou být pouze v bodech nespojitosti funkce $f(x)$. Samozřejmě ne každý bod nespojitosti zadává asymptotu, viz např. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ v $x_0 = 0$.

Asymptoty se směrnicí

Věta

Přímka $y = ax + b$ *je asymptotou funkce* $f(x)$ *v* ∞ $\Leftrightarrow$

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - ax].$$

Podobně, přímka $y = ax + b$ *je asymptotou funkce* $f(x)$ *v* $-\infty$ $\Leftrightarrow$

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - ax].$$

Důkaz.

Býti asymptotou v ∞ znamená, že $f(x) \approx ax + b$ pro $x \to \infty$. Tedy pokud obě strany podělíme výrazem x, dostaneme, že

$$\frac{f(x)}{x} \approx a + \frac{b}{x} \qquad \text{pro } x \to \infty.$$

A protože výraz $\frac{b}{x} \to 0$ pro $x \to \infty$, dostáváme odtud vzoreček pro hodnotu koeficientu a.
Dále, známe-li koeficient a, potom

$$f(x) - ax \approx b \qquad \text{pro } x \to \infty.$$

$\square$

Samozřejmě, pokud alespoň jedna z limit definujících koeficienty a, b je *nevlastní* nebo *neexistuje*, tak potom daná funkce asymptotu v příslušném ∞ nebo $-\infty$ *nemá*.

Příklad

Určete asymptoty funkce

$$f(x) = \frac{(x-2)^3}{(x+2)^2}.$$

Příklad

Určete asymptoty funkce

$$f(x) = \frac{(x-2)^3}{(x+2)^2}.$$

Řešení

$x = -2$ je asymptota bez směrnice.

Příklad

Určete asymptoty funkce

$$f(x) = \frac{(x-2)^3}{(x+2)^2}.$$

Řešení

$x = -2$ je asymptota bez směrnice.
$a_+ = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \cdots = 1$, $b_+ = \cdots = -10$. Podobně pro $x \to -\infty$. Proto $y = x - 10$ je asymptota v ∞ i v $-\infty$.

Celkový průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce určíme

- definiční obor (pokud již není zadán),

Celkový průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce určíme

- definiční obor (pokud již není zadán),
- první derivaci $f'(x)$ a vše co z ní lze určit, tj. stacionární body, body kde neexistuje $f'(x)$, intervaly monotonie (rostoucí a klesající $f(x)$) a lokální extrémy.

Celkový průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce určíme

- definiční obor (pokud již není zadán),
- první derivaci $f'(x)$ a vše co z ní lze určit, tj. stacionární body, body kde neexistuje $f'(x)$, intervaly monotonie (rostoucí a klesající $f(x)$) a lokální extrémy.
- druhou derivaci $f''(x)$ a vše co z ní lze určit, tj. konvexnost, konkávnost a inflexní body, případně lokální extrémy.

Celkový průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce určíme

- definiční obor (pokud již není zadán),
- první derivaci $f'(x)$ a vše co z ní lze určit, tj. stacionární body, body kde neexistuje $f'(x)$, intervaly monotonie (rostoucí a klesající $f(x)$) a lokální extrémy.
- druhou derivaci $f''(x)$ a vše co z ní lze určit, tj. konvexnost, konkávnost a inflexní body, případně lokální extrémy.
- asymptoty bez směrnice a se směrnicí,

Celkový průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce určíme

- definiční obor (pokud již není zadán),
- první derivaci $f'(x)$ a vše co z ní lze určit, tj. stacionární body, body kde neexistuje $f'(x)$, intervaly monotonie (rostoucí a klesající $f(x)$) a lokální extrémy.
- druhou derivaci $f''(x)$ a vše co z ní lze určit, tj. konvexnost, konkávnost a inflexní body, případně lokální extrémy.
- asymptoty bez směrnice a se směrnicí,
- hodnoty funkce $f(x)$ a derivace $f'(x)$ ve všech „význačných" bodech (např. stacionárních a inflexních bodech, kde neexistuje $f'(x)$ nebo $f''(x)$, v krajních bodech, atd.),

Celkový průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce určíme

- definiční obor (pokud již není zadán),
- první derivaci $f'(x)$ a vše co z ní lze určit, tj. stacionární body, body kde neexistuje $f'(x)$, intervaly monotonie (rostoucí a klesající $f(x)$) a lokální extrémy.
- druhou derivaci $f''(x)$ a vše co z ní lze určit, tj. konvexnost, konkávnost a inflexní body, případně lokální extrémy.
- asymptoty bez směrnice a se směrnicí,
- hodnoty funkce $f(x)$ a derivace $f'(x)$ ve všech „význačných“ bodech (např, stacionárních a inflexních bodech, kde neexistuje $f'(x)$ nebo $f''(x)$, v krajních bodech, atd.),
- a nakonec ze všech těchto informací sestrojíme graf funkce $f(x)$.

Příklad

Vyšetřete celkový průběh funkce

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x.$$

Příklad

Vyšetřete celkový průběh funkce

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x.$$

Řešení

- Definiční obor je $\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$.

Příklad

Vyšetřete celkový průběh funkce

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x.$$

Řešení

- Definiční obor je $\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$.
- První derivace $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$, tj. $x = 1$ je jediný stacionární bod (a z vyšetření okolí je zřejmě globálním minimem funkce $f(x)$).

Příklad

Vyšetřete celkový průběh funkce

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x.$$

Řešení

- Definiční obor je $\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$.
- První derivace $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$, tj. $x = 1$ je jediný stacionární bod (a z vyšetření okolí je zřejmě globálním minimem funkce $f(x)$).
- Druhá derivace $f''(x) = \frac{2-x}{x^3}$, je proto $x = 2$ je jediným kandidátem na inflexní bod a snadno je vidět, že jím i je.

Příklad

Vyšetřete celkový průběh funkce

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x.$$

Řešení

- Definiční obor je $\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$.
- První derivace $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$, tj. $x = 1$ je jediný stacionární bod (a z vyšetření okolí je zřejmě globálním minimem funkce $f(x)$).
- Druhá derivace $f''(x) = \frac{2-x}{x^3}$, je proto $x = 2$ je jediným kandidátem na inflexní bod a snadno je vidět, že jím i je.
- $x = 0$ je asymptota bez směrnice

Příklad

Vyšetřete celkový průběh funkce

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x.$$

Řešení

- Definiční obor je $\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$.
- První derivace $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$, tj. $x = 1$ je jediný stacionární bod (a z vyšetření okolí je zřejmě globálním minimem funkce $f(x)$).
- Druhá derivace $f''(x) = \frac{2-x}{x^3}$, je proto $x = 2$ je jediným kandidátem na inflexní bod a snadno je vidět, že jím i je.
- $x = 0$ je asymptota bez směrnice
- $f(x)$ nemá žádnou asymptotu se směrnicí

Příklad

Vyšetřete celkový průběh funkce

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x.$$

Řešení

- Definiční obor je $\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$.
- První derivace $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$, tj. $x = 1$ je jediný stacionární bod (a z vyšetření okolí je zřejmě globálním minimem funkce $f(x)$).
- Druhá derivace $f''(x) = \frac{2-x}{x^3}$, je proto $x = 2$ je jediným kandidátem na inflexní bod a snadno je vidět, že jím i je.
- $x = 0$ je asymptota bez směrnice
- $f(x)$ nemá žádnou asymptotu se směrnicí
- Hodnoty funkce $f(x)$ a derivace $f'(x)$ ve všech „význačných" bodech:
  $f(1) = 1, \quad f'(1) = 0, \quad f(2) = \frac{1}{2} + \ln 2 \approx 1{,}19, \quad f'(2) = \frac{1}{4}.$

Plán přednášky

V tomto odstavci uvidíme, jak využít znalostí o průběhu funkce či globálních extrémů funkce pro aplikace v „běžném životě“.

Příklad (Papírová krabice)

Z kartonu velikosti A4 vyřízněte v každém rohu stejný čtverec tak, abyste mohli sestrojit krabici (bez víka) s co *největším objemem*.

V tomto odstavci uvidíme, jak využít znalostí o průběhu funkce či globálních extrémů funkce pro aplikace v „běžném životě“.

Příklad (**Papírová krabice**)

Z kartonu velikosti A4 vyřízněte v každém rohu stejný čtverec tak, abyste mohli sestrojit krabici (bez víka) s co *největším objemem*.

Řešení

Označme jako x (v mm) délku strany čtverců, které musíme vyříznout. Potom má zbývající podstava rozměry $(297 - 2x)$ cm $\times$ $(210 - 2x)$ cm, přičemž výška krabice bude právě x cm.

V tomto odstavci uvidíme, jak využít znalostí o průběhu funkce či globálních extrémů funkce pro aplikace v „běžném životě“.

Příklad (**Papírová krabice**)

Z kartonu velikosti A4 vyřízněte v každém rohu stejný čtverec tak, abyste mohli sestrojit krabici (bez víka) s co *největším objemem*.

Řešení

Označme jako x (v mm) délku strany čtverců, které musíme vyříznout. Potom má zbývající podstava rozměry $(297-2x)$ cm $\times$ $(210-2x)$ cm, přičemž výška krabice bude právě x cm.
Pro objem krabice dostaneme proto vztah

$$V = V(x) = (297-2x)(210-2x)\,x = 4\,x^3 - 1014\,x^2 + 62370\,x$$

Délka strany vyřízlých čtverců může být nejvýše $210/2 = 105$ mm, a proto musíme najít maximum funkce $V(x)$ na intervalu $[0, 105]$.

Řešení (pokr.)

Protože je fukce $V(x)$ spojitá na intervalu $[0, 105]$, její maximum existuje (Weierstrassova věta) Musíme najít stacionární body:

$$V'(x) = 12\,x^2 - 2028\,x + 62370$$
$$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{169}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{7771}$$

Body, kde $V'(x)$ neexistuje, nejsou.

Řešení (pokr.)

Protože je fukce $V(x)$ spojitá na intervalu $[0, 105]$, její maximum existuje (Weierstrassova věta) Musíme najít stacionární body:

$$V'(x) = 12\,x^2 - 2028\,x + 62370$$
$$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{169}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{7771}$$

Body, kde $V'(x)$ neexistuje, nejsou.
Bod $x_2 \approx 40{,}42$ leží v intervalu $[0, 105]$, zatímco bod x_1 nikoliv.
Hodnoty funkce $V(x)$ ve významných (stacionárních a krajních) bodech jsou

stacionární bod:	$x_2 \approx 40{,}42,$	$V(x_2) = 1{,}1285 \times 10^6$
krajní body:	$x = 0,$	$V(0) = 0,$
	$x = 105,$	$V(0) = 0.$

Řešení (dokončení)

Tedy maximální objem je cca 1,1285 litru pro krabici o rozměrech cca 257 mm $\times$ 170 mm $\times$ 40 mm.

Řešení (dokončení)

Tedy maximální objem je cca 1,1285 litru pro krabici o rozměrech cca 257 mm $\times$ 170 mm $\times$ 40 mm.

Všimněte si, že maximum můžeme také ověřit testem s první derivací): pro $x \in [0, x_2)$ je $V'(x) > 0$, tedy $V(x)$ je rostoucí na intervalu $[0, x_2]$, zatímco pro $x \in (x_2, 105)$ je $V'(x) < 0$ a tedy $V(x)$ je klesající na intervalu $[x_2, 105]$.

Příklad (Výroba plechovky)

Určete rozměry litrové plechovky tak, aby spotřeba materiálu na její výrobu byla co *nejmenší*.

Příklad (**Výroba plechovky**)

Určete rozměry litrové plechovky tak, aby spotřeba materiálu na její výrobu byla co *nejmenší*.

Řešení

Označme si jako h (v cm) výšku plechovky a jako r (v cm) poloměr jejího dna (či víčka). Potom je na výrobu takové plechovky potřeba

$$S = S(h, r) = \underbrace{2\pi r^2}_{\text{dno + víčko}} + \underbrace{2\pi rh}_{\text{stěna}} \qquad \text{cm}^2 \text{ materiálu.}$$

Protože ale musí mít plechovka objem 1 litr $= 1000$ cm^3, musí platit

$$V = \pi r^2 h = 1000 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{1000}{\pi r^2},$$

Řešení (pokr.)

Odtud

$$S = S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}, \qquad \text{pro } r > 0.$$

Hledáme tedy minimum funkce $S(r)$ pro $r \in (0, \infty)$. Všimněte si, že daný interval *není* uzavřený ani ohraničený, a proto pro existenci extrému nelze použít Weierstrassovu větu.

Řešení (pokr.)

Odtud

$$S = S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}, \qquad \text{pro } r > 0.$$

Hledáme tedy minimum funkce $S(r)$ pro $r \in (0, \infty)$. Všimněte si, že daný interval *není* uzavřený ani ohraničený, a proto pro existenci extrému nelze použít Weierstrassovu větu.

Určeme nejdříve stacionární body:

$$S'(r) = (2\pi r^2 + 2000\, r^{-1})' = 4\pi r - 2000\, r^{-2} = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0,$$

$$\Rightarrow \qquad \pi r^3 = 500, \qquad \Rightarrow \qquad r = r_0 := \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5{,}42.$$

Dále, protože je

$$S''(x) = (4\pi r - 2000\, r^{-2})' = 4\pi + 4000\, r^{-3} = 4\pi + \frac{4000}{r^3} > 0 \text{ pro } r > 0,$$

je funkce $S(r)$ *konvexní na celém intervalu* $(0, \infty)$. A proto je bod r_0 *globální minimum*.

Dále, protože je

$$S''(x) = (4\pi r - 2000\, r^{-2})' = 4\pi + 4000\, r^{-3} = 4\pi + \frac{4000}{r^3} > 0 \text{ pro } r > 0,$$

je funkce $S(r)$ *konvexní na celém intervalu* $(0, \infty)$. A proto je bod r_0 *globální minimum*.
Odpovídající výška plechovky je pak

$$h_0 = \frac{1000}{\pi r_0^2} = \frac{1000}{\pi \sqrt[3]{\left(\frac{500}{\pi}\right)^2}} = 2\,\frac{\frac{500}{\pi}}{\sqrt[3]{\left(\frac{500}{\pi}\right)^2}} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2\, r_0 \approx 10{,}84.$$

Spotřeba materiálu je tedy minimální, pokud

je výška plechovky rovna průměru podstavy.

Plán přednášky

Předpokládejme, že známe na intervalu $[a, b]$ reálnou funkci $F(x)$ reálné proměnné x a její derivaci

$$F'(x) = f(x).$$

Jestliže rozdělíme interval $[a, b]$ na n částí volbou bodů

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

a přiblížíme hodnoty derivací v bodech x_i výrazy

$$f(x) \simeq \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

dostáváme součet

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \cdot (x_{i+1} - x_i) \simeq \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i).$$

Předpokládejme, že známe na intervalu $[a, b]$ reálnou funkci $F(x)$ reálné proměnné x a její derivaci

$$F'(x) = f(x).$$

Jestliže rozdělíme interval $[a, b]$ na n částí volbou bodů

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

a přiblížíme hodnoty derivací v bodech x_i výrazy

$$f(x) \simeq \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

dostáváme součet

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \cdot (x_{i+1} - x_i) \simeq \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i).$$

Funkci F nazýváme **antiderivace** nebo **primitivní funkce** k funkci f, množinu všech takových funkcí nazveme **neurčítým integrálem** funkce f.

Antiderivace reálné funkce $f(x)$ zjevně přibližně vyjadřuje plochu vytyčenou grafem funkce f, souřadnou osou x a přímkami $x = a$, $x = b$ (včetně znaménka zohledňujícího pozici plochy nad nebo pod osou x!).

Antiderivace reálné funkce $f(x)$ zjevně přibližně vyjadřuje plochu vytyčenou grafem funkce f, souřadnou osou x a přímkami $x = a$, $x = b$ (včetně znaménka zohledňujícího pozici plochy nad nebo pod osou x!).

Dá se tedy očekávat, že takovou plochu skutečně spočteme jako rozdíl hodnot antiderivace v krajních bodech intervalu. Tomuto postupu se také říká **Newtonův integrál**. Píšeme

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Poznámka

V dalším skutečně ukážeme, že lze rozumně definovat pojem plocha v rovině tak, aby ji bylo možné počítat právě uvedeným způsobem. Newtonův integrál má ale jednu podstatnou vadu — jeho vyčíslení vyžaduje znalost antiderivace. Tu obecně není snadné spočíst i když ukážeme, že ke všem spojitým funkcím f existuje. Proto budeme napřed diskutovat jinou definici integrálu.

Všimněme si ještě, že antiderivace je na každém souvislém intervalu $[a, b]$ určena jednoznačně až na konstantu. Skutečně, pokud je $F'(x) = G'(x) = f(x)$, pak z předchozího víme, že se zbytkem v bodě a dává

$$F(x) - G(x) = \mathrm{konst.}$$

na celém intervalu.

Všimněme si ještě, že antiderivace je na každém souvislém intervalu $[a, b]$ určena jednoznačně až na konstantu. Skutečně, pokud je $F'(x) = G'(x) = f(x)$, pak z předchozího víme, že se zbytkem v bodě a dává

$$F(x) - G(x) = \mathrm{konst.}$$

na celém intervalu.

S poukazem na toto pozorování budeme neurčitý integrál také zapisovat ve tvaru

$$F(t) = \int f(x)dx + C.$$

Všimněme si ještě, že antiderivace je na každém souvislém intervalu $[a, b]$ určena jednoznačně až na konstantu. Skutečně, pokud je $F'(x) = G'(x) = f(x)$, pak z předchozího víme, že se zbytkem v bodě a dává

$$F(x) - G(x) = \text{konst.}$$

na celém intervalu.
S poukazem na toto pozorování budeme neurčitý integrál také zapisovat ve tvaru

$$F(t) = \int f(x)dx + C.$$

Příklad

Protože mají funkce $F(x) = \operatorname{arctg} x$ a $G(x) = -\operatorname{arccotg} x$ stejnou derivaci $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, musí se tyto funkce lišit o konstantu. Konstantu C můžeme určit např. z hodnot těchto funkcí v bodě $x = 0$, $\operatorname{arctg} 0 = 0, \operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}, \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$, neboli platí $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$

Definice

Nechť $f(x)$ a $F(x)$ jsou funkce definované na intervalu I. Funkce $F(x)$ je *primitivní* k funkci $f(x)$ na intervalu I, pokud

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{pro všechna } x \in I.$$

Definice

Nechť $f(x)$ a $F(x)$ jsou funkce definované na intervalu I. Funkce $F(x)$ je *primitivní* k funkci $f(x)$ na intervalu I, pokud

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{pro všechna } x \in I.$$

Co už víme?

Z pravidel pro derivování elementárních funkcí snadno dostáváme následující.

(a) Funkce $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ je primitivní k funkci x^n na $\mathbb{R}$.

Definice

Nechť $f(x)$ a $F(x)$ jsou funkce definované na intervalu I. Funkce $F(x)$ je *primitivní* k funkci $f(x)$ na intervalu I, pokud

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{pro všechna } x \in I.$$

Co už víme?

Z pravidel pro derivování elementárních funkcí snadno dostáváme následující.

(a) Funkce $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ je primitivní k funkci x^n na $\mathbb{R}$.

(b) Funkce $\ln x$ je primitivní k funkci $\frac{1}{x}$ na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$.

Definice

Nechť $f(x)$ a $F(x)$ jsou funkce definované na intervalu I. Funkce $F(x)$ je *primitivní* k funkci $f(x)$ na intervalu I, pokud

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{pro všechna } x \in I.$$

Co už víme?

Z pravidel pro derivování elementárních funkcí snadno dostáváme následující.

(a) Funkce $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ je primitivní k funkci x^n na $\mathbb{R}$.

(b) Funkce $\ln x$ je primitivní k funkci $\frac{1}{x}$ na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$.

(c) Funkce $\operatorname{arctg} x$ je primitivní k funkci $\frac{1}{1+x^2}$ na $\mathbb{R}$.

Definice

Nechť $f(x)$ a $F(x)$ jsou funkce definované na intervalu I. Funkce $F(x)$ je *primitivní* k funkci $f(x)$ na intervalu I, pokud

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{pro všechna } x \in I.$$

Co už víme?

Z pravidel pro derivování elementárních funkcí snadno dostáváme následující.

(a) Funkce $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ je primitivní k funkci x^n na $\mathbb{R}$.

(b) Funkce $\ln x$ je primitivní k funkci $\frac{1}{x}$ na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$.

(c) Funkce $\operatorname{arctg} x$ je primitivní k funkci $\frac{1}{1+x^2}$ na $\mathbb{R}$.

(d) Funkce $\arcsin x$ je primitivní k funkci $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ na $(-1, 1)$.

Definice

Nechť $f(x)$ a $F(x)$ jsou funkce definované na intervalu I. Funkce $F(x)$ je *primitivní* k funkci $f(x)$ na intervalu I, pokud

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{pro všechna } x \in I.$$

Co už víme?

Z pravidel pro derivování elementárních funkcí snadno dostáváme následující.

(a) Funkce $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ je primitivní k funkci x^n na $\mathbb{R}$.

(b) Funkce $\ln x$ je primitivní k funkci $\frac{1}{x}$ na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$.

(c) Funkce $\operatorname{arctg} x$ je primitivní k funkci $\frac{1}{1+x^2}$ na $\mathbb{R}$.

(d) Funkce $\arcsin x$ je primitivní k funkci $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ na $(-1, 1)$.

(e) Funkce C (konstantní funkce) je primitivní k funkci 0 na $\mathbb{R}$.

Existence primitivní funkce

Kdy k dané funkci $f(x)$ existuje primitivní funkce $F(x)$? Ne vždy!

Existence primitivní funkce

Kdy k dané funkci $f(x)$ existuje primitivní funkce $F(x)$? Ne vždy!

Věta

Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu I, potom k ní existuje na tomto intervalu funkce primitivní.

Důkaz.

Později. □

Existence primitivní funkce

Kdy k dané funkci $f(x)$ existuje primitivní funkce $F(x)$? Ne vždy!

Věta

Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu I, potom k ní existuje na tomto intervalu funkce primitivní.

Důkaz.

Později. $\square$

Poznámka

Věta udává pouze postačující podmínku pro existenci primitivní funkce, spojitost **není** podmínkou nutnou!
Např. funkce $f(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, \qquad \text{pro } x \neq 0, \; f(0) = 0$ není spojitá v bodě $x = 0$, přitom snadno spočítáme, že funkce $F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}, \qquad \text{pro } x \neq 0, \text{ a } F(0) = 0$ je k $f(x)$ primitivní.

Tabulkové integrály

$$\int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

$$\int \frac{a}{x}\, dx = a \ln x + C$$

$$\int a \cos bx\, dx = \frac{a}{b} \sin bx + C$$

$$\int a \sin bx\, dx = -\frac{a}{b} \cos bx + C$$

$$\int a \cos bx \sin^n bx\, dx = \frac{a}{b(n+1)} \sin^{n+1} bx + C$$

$$\int a \sin bx \cos^n bx\, dx = -\frac{a}{b(n+1)} \cos^{n+1} bx + C$$

$$\int a \operatorname{tg} bx\, dx = -\frac{a}{b} \ln(\cos bx) + C$$

$$\int \frac{a}{a^2 + x^2}\, dx = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln |f(x)| + C$$

Poznámka

V posledním vzorci si všimněte, že na pravé straně je v logaritmu absolutní hodnota, neboť pro $x > 0$ je $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ a pro $x < 0$ je $[\ln(-x)]' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$.

Plán přednášky

Věta

(i) *Pravidlo konstantního násobku:*

$$\int c \, . \, f(x) \, dx = c \int f(x) \, dx.$$

Neboli, je-li $F(x)$ primitivní k $f(x)$, potom je $c \, . \, F(x)$ primitivní k $c \, . \, f(x)$.

Věta

(i) *Pravidlo konstantního násobku:*

$$\int c \,.\, f(x)\,dx = c \int f(x)\,dx.$$

Neboli, je-li $F(x)$ primitivní k $f(x)$, potom je $c \,.\, F(x)$ primitivní k $c \,.\, f(x)$.

(ii) *Pravidlo součtu a rozdílu:*

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

Neboli, je-li $F(x)$ primitivní k $f(x)$ a je-li $G(x)$ primitivní k $g(x)$, potom je $F(x) \pm G(x)$ primitivní k $f(x) \pm g(x)$.

Metoda per partes

Metoda pro integraci per partes (= po částech) je jednoduchým důsledkem pravidla pro derivaci součinu. Toto integrační pravidlo umožňuje integrovat součiny funkcí, přičemž integrál z daného součinu se vhodně převede na integrál z jednoduššího součinu.

Věta

Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají derivaci na intervalu I. Potom platí

$$\int u'(x) \,.\, v(x) \, dx = u(x) \,.\, v(x) - \int u(x) \,.\, v'(x) \, dx.$$

Metoda per partes

Metoda pro integraci per partes (= po částech) je jednoduchým důsledkem pravidla pro derivaci součinu. Toto integrační pravidlo umožňuje integrovat součiny funkcí, přičemž integrál z daného součinu se vhodně převede na integrál z jednoduššího součinu.

Věta

Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají derivaci na intervalu I. Potom platí

$$\int u'(x)\,.\,v(x)\,dx = u(x)\,.\,v(x) - \int u(x)\,.\,v'(x)\,dx.$$

Důkaz.

Tato metoda je jednoduchým důsledkem pravidla pro derivaci součinu: $[u\,v]' = u'\,v + u\,v', \Rightarrow \int [u\,v]' = \int (u'\,v + u\,v') \Rightarrow u\,v = \int u'\,v + \int u\,v'$. $\square$

Příslušné výpočty pro metodu per partes se často ve výpočtu zapisují mezi dvě svislé čáry.

Příklad

$$\int x \cos x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u' = \cos x & u = \sin x \\ v = x & v' = 1 \end{array} \right| = x \sin x - \int \sin x \, dx =$$

$$= x \sin x - (-\cos x) + C = x \sin x + \cos x + C.$$

Příslušné výpočty pro metodu per partes se často ve výpočtu zapisují mezi dvě svislé čáry.

Příklad

$$\int x\cos x\,dx = \left|\begin{array}{ll} u' = \cos x & u = \sin x \\ v = x & v' = 1 \end{array}\right| = x\sin x - \int \sin x\,dx =$$
$$= x\sin x - (-\cos x) + C = x\sin x + \cos x + C.$$

Příklad

$$\int x\ln x\,dx = \left|\begin{array}{ll} u' = x & u = \frac{x^2}{2} \\ v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \end{array}\right| = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx =$$
$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Metoda per partes občas vyžaduje i použití některých (i když dnes už dostatečně *profláknutých*) triků:

Příklad

$$\int \ln x\,dx = \int 1\,.\,\ln x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u' = 1 & u = x \\ v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \end{array} \right| =$$

$$= x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int 1\,dx = x\ln x - x + C.$$

Příklad

$$\underbrace{\int e^x \sin x \, dx}_{\text{označme jako } I} = \left| \begin{array}{ll} u' = e^x & u = e^x \\ v = \sin x & v' = \cos x \end{array} \right| =$$

$$= e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u' = e^x & u = e^x \\ v = \cos x & v' = -\sin x \end{array} \right|$$

$$= e^x \sin x - \left\{ e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) \, dx \right\} =$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \underbrace{\int e^x \sin x \, dx}_{=I},$$

pro neznámý integrál I tedy dostáváme rovnici
$I = e^x (\sin x - \cos x) - I$, odkud snadno dopočteme
$I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x)$.

Poznámka

- Metoda per-partes vede k cíli zejména pro integrály typu

$$\int x^n\, e^{ax}\, dx, \quad \int x^n \cos(ax)\, dx, \quad \int x^n \sin(ax)\, dx,$$

$$\int x^n \operatorname{arctg}(ax)\, dx, \quad \int x^n \operatorname{arccotg}(ax)\, dx, \quad \int x^a \ln^n x\, dx.$$

Poznámka

- Metoda per-partes vede k cíli zejména pro integrály typu

$$\int x^n\, e^{ax}\, dx, \quad \int x^n \cos(ax)\, dx, \quad \int x^n \sin(ax)\, dx,$$

$$\int x^n \operatorname{arctg}(ax)\, dx, \quad \int x^n \operatorname{arccotg}(ax)\, dx, \quad \int x^a \ln^n x\, dx.$$

- Metoda per-partes vede někdy na rovnici pro neznámý integrál, např.

$$\int e^{ax} \cos(bx)\, dx, \quad \int e^{ax} \sin(bx)\, dx.$$

Poznámka

- Metoda per-partes vede k cíli zejména pro integrály typu

$$\int x^n\, e^{ax}\, dx, \quad \int x^n \cos(ax)\, dx, \quad \int x^n \sin(ax)\, dx,$$

$$\int x^n \operatorname{arctg}(ax)\, dx, \quad \int x^n \operatorname{arccotg}(ax)\, dx, \quad \int x^a \ln^n x\, dx.$$

- Metoda per-partes vede někdy na rovnici pro neznámý integrál, např.

$$\int e^{ax} \cos(bx)\, dx, \quad \int e^{ax} \sin(bx)\, dx.$$

- Metoda per-partes vede někdy na rekurentní formuli pro neznámý integrál (viz následující příklad).

Příklad

Určete
$$K_n(x) := \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx.$$

Příklad

Určete

$$K_n(x) := \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx.$$

Řešení

$$\begin{aligned}
K_n(x) &= \left| \begin{array}{ll} u' = 1 & u = x \\ v = (x^2+1)^{-n} & v' = -n(x^2+1)^{-n-1} \,.\, 2x \end{array} \right| \\
&= x\,(x^2+1)^{-n} - \int x \,.\, (-n)\,(x^2+1)^{-n-1} \,.\, 2x\,dx \\
&= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx \\
&= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int \left(\frac{1}{(x^2+1)^n} - \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}} \right) dx \\
&= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\,[K_n(x) - K_{n+1}(x)].
\end{aligned}$$

Příklad (Dokončení)

Z rovnice snadno dopočteme $K_{n+1}(x) = \frac{1}{2n} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} \cdot K_n(x)$, odkud je pak možné iterativně počítat hodnoty K_n, např. volbou $n = 1$ vypočítáme integrál $K_2(x)$:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \cdot K_1(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$$