# Matematika II – 6. přednáška
# Primitivní funkce, neurčitý integrál

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

5. 11. 2008

# Obsah přednášky

# Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB102`, *e*-text.

# Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB102`, *e*-text.
- Robert Mařík – Příklady řešené krok za krokem (`http://user.mendelu.cz/marik/prez/integraly-cz.pdf`).

# Plán přednášky

Předpokládejme, že známe na intervalu $[a, b]$ reálnou funkci $F(x)$ reálné proměnné $x$ a její derivaci

$$F'(x) = f(x).$$

Jestliže rozdělíme interval $[a, b]$ na $n$ částí volbou bodů

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

a přiblížíme hodnoty derivací v bodech $x_i$ výrazy

$$f(x) \simeq \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

dostáváme součet

$$F(b)-F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \cdot (x_{i+1}-x_i) \simeq \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot (x_{i+1}-x_i).$$

Předpokládejme, že známe na intervalu $[a, b]$ reálnou funkci $F(x)$ reálné proměnné $x$ a její derivaci

$$F'(x) = f(x).$$

Jestliže rozdělíme interval $[a, b]$ na $n$ částí volbou bodů

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

a přiblížíme hodnoty derivací v bodech $x_i$ výrazy

$$f(x) \simeq \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

dostáváme součet

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{F(x_{i+1}) - F(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \cdot (x_{i+1} - x_i) \simeq \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i).$$

Funkci $F$ nazýváme **antiderivace** nebo **primitivní funkce** k funkci $f$, množinu všech takových funkcí nazveme **neurčitým integrálem** funkce $f$.

Antiderivace reálné funkce $f(x)$ zjevně přibližně vyjadřuje plochu vytyčenou grafem funkce $f$, souřadnou osou $x$ a přímkami $x = a$, $x = b$ (včetně znaménka zohledňujícího pozici plochy nad nebo pod osou $x$!).

Antiderivace reálné funkce $f(x)$ zjevně přibližně vyjadřuje plochu vytyčenou grafem funkce $f$, souřadnou osou $x$ a přímkami $x = a$, $x = b$ (včetně znaménka zohledňujícího pozici plochy nad nebo pod osou $x$!).
Dá se tedy očekávat, že takovou plochu skutečně spočteme jako rozdíl hodnot antiderivace v krajních bodech intervalu. Tomuto postupu se také říká **Newtonův integrál**. Píšeme

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

### Poznámka

V dalším skutečně ukážeme, že lze rozumně definovat pojem plocha v rovině tak, aby ji bylo možné počítat právě uvedeným způsobem. Newtonův integrál má ale jednu podstatnou vadu — jeho vyčíslení vyžaduje znalost antiderivace. Tu obecně není snadné spočíst i když ukážeme, že ke všem spojitým funkcím $f$ existuje. Proto budeme napřed diskutovat jinou definici integrálu.

Všimněme si ještě, že antiderivace je na každém souvislém intervalu $[a, b]$ určena jednoznačně až na konstantu. Skutečně, pokud je $F'(x) = G'(x) = f(x)$, pak z předchozího víme, že

$$F(x) - G(x) = \mathrm{konst.}$$

na celém intervalu.

Všimněme si ještě, že antiderivace je na každém souvislém intervalu $[a, b]$ určena jednoznačně až na konstantu. Skutečně, pokud je $F'(x) = G'(x) = f(x)$, pak z předchozího víme, že

$$F(x) - G(x) = \mathrm{konst.}$$

na celém intervalu.

S poukazem na toto pozorování budeme neurčitý integrál také zapisovat ve tvaru

$$F(t) = \int f(x)dx + C.$$

Všimněme si ještě, že antiderivace je na každém souvislém intervalu $[a, b]$ určena jednoznačně až na konstantu. Skutečně, pokud je $F'(x) = G'(x) = f(x)$, pak z předchozího víme, že

$$F(x) - G(x) = \text{konst.}$$

na celém intervalu.

S poukazem na toto pozorování budeme neurčitý integrál také zapisovat ve tvaru

$$F(t) = \int f(x)dx + C.$$

**Příklad**

Protože mají funkce $F(x) = \operatorname{arctg} x$ a $G(x) = -\operatorname{arccotg} x$ stejnou derivaci $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, musí se tyto funkce lišit o konstantu. Konstantu $C$ můžeme určit např. z hodnot těchto funkcí v bodě $x = 0$, $\operatorname{arctg} 0 = 0, \operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}, \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$, neboli platí
$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$

**Definice**

Nechť $f(x)$ a $F(x)$ jsou funkce definované na intervalu $I$. Funkce $F(x)$ je *primitivní* k funkci $f(x)$ na intervalu $I$, pokud

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{pro všechna } x \in I.$$

## Definice

Nechť $f(x)$ a $F(x)$ jsou funkce definované na intervalu $I$. Funkce $F(x)$ je *primitivní* k funkci $f(x)$ na intervalu $I$, pokud

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{pro všechna } x \in I.$$

## Co už víme?

Z pravidel pro derivování elementárních funkcí snadno dostáváme následující.

(a) Funkce $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ je primitivní k funkci $x^n$ na $\mathbb{R}$.

## Definice

Nechť $f(x)$ a $F(x)$ jsou funkce definované na intervalu $I$. Funkce $F(x)$ je *primitivní* k funkci $f(x)$ na intervalu $I$, pokud

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{pro všechna } x \in I.$$

## Co už víme?

Z pravidel pro derivování elementárních funkcí snadno dostáváme následující.

(a) Funkce $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ je primitivní k funkci $x^n$ na $\mathbb{R}$.

(b) Funkce $\ln x$ je primitivní k funkci $\frac{1}{x}$ na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$.

## Definice

Nechť $f(x)$ a $F(x)$ jsou funkce definované na intervalu $I$. Funkce $F(x)$ je *primitivní* k funkci $f(x)$ na intervalu $I$, pokud

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{pro všechna } x \in I.$$

## Co už víme?

Z pravidel pro derivování elementárních funkcí snadno dostáváme následující.

(a) Funkce $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ je primitivní k funkci $x^n$ na $\mathbb{R}$.

(b) Funkce $\ln x$ je primitivní k funkci $\frac{1}{x}$ na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$.

(c) Funkce $\operatorname{arctg} x$ je primitivní k funkci $\frac{1}{1+x^2}$ na $\mathbb{R}$.

## Definice

Nechť $f(x)$ a $F(x)$ jsou funkce definované na intervalu $I$. Funkce $F(x)$ je *primitivní* k funkci $f(x)$ na intervalu $I$, pokud

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{pro všechna } x \in I.$$

## Co už víme?

Z pravidel pro derivování elementárních funkcí snadno dostáváme následující.

(a) Funkce $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ je primitivní k funkci $x^n$ na $\mathbb{R}$.

(b) Funkce $\ln x$ je primitivní k funkci $\frac{1}{x}$ na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$.

(c) Funkce $\operatorname{arctg} x$ je primitivní k funkci $\frac{1}{1+x^2}$ na $\mathbb{R}$.

(d) Funkce $\arcsin x$ je primitivní k funkci $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ na $(-1, 1)$.

## Definice

Nechť $f(x)$ a $F(x)$ jsou funkce definované na intervalu $I$. Funkce $F(x)$ je *primitivní* k funkci $f(x)$ na intervalu $I$, pokud

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{pro všechna } x \in I.$$

## Co už víme?

Z pravidel pro derivování elementárních funkcí snadno dostáváme následující.

(a) Funkce $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ je primitivní k funkci $x^n$ na $\mathbb{R}$.

(b) Funkce $\ln x$ je primitivní k funkci $\frac{1}{x}$ na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$.

(c) Funkce $\operatorname{arctg} x$ je primitivní k funkci $\frac{1}{1+x^2}$ na $\mathbb{R}$.

(d) Funkce $\arcsin x$ je primitivní k funkci $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ na $(-1, 1)$.

(e) Funkce $C$ (konstantní funkce) je primitivní k funkci 0 na $\mathbb{R}$.

# Existence primitivní funkce

Kdy k dané funkci $f(x)$ existuje primitivní funkce $F(x)$? Ne vždy!

# Existence primitivní funkce

Kdy k dané funkci $f(x)$ existuje primitivní funkce $F(x)$? Ne vždy!

**Věta**

*Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $I$, potom k ní existuje na tomto intervalu funkce primitivní.*

**Důkaz.**

Později. $\square$

# Existence primitivní funkce

Kdy k dané funkci $f(x)$ existuje primitivní funkce $F(x)$? Ne vždy!

**Věta**

*Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $I$, potom k ní existuje na tomto intervalu funkce primitivní.*

**Důkaz.**

Později. $\square$

**Poznámka**

Věta udává pouze postačující podmínku pro existenci primitivní funkce, spojitost **není** podmínkou nutnou!
Např. funkce $f(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, \quad \text{pro } x \neq 0,\ f(0) = 0$ není spojitá v bodě $x = 0$, přitom snadno spočítáme, že funkce $F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}, \quad \text{pro } x \neq 0$, a $F(0) = 0$ je k $f(x)$ primitivní.

# Tabulkové integrály

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$$

$$\int \frac{a}{x}\,dx = a\ln x + C$$

$$\int a\cos bx\,dx = \frac{a}{b}\sin bx + C$$

$$\int a\sin bx\,dx = -\frac{a}{b}\cos bx + C$$

$$\int a\cos bx\sin^n bx\,dx = \frac{a}{b(n+1)}\sin^{n+1} bx + C$$

$$\int a\sin bx\cos^n bx\,dx = -\frac{a}{b(n+1)}\cos^{n+1} bx + C$$

$$\int a\,\mathrm{tg}\,bx\,dx = -\frac{a}{b}\ln(\cos bx) + C$$

$$\int \frac{a}{a^2 + x^2}\, dx = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + C$$

### Poznámka

V posledním vzorci si všimněte, že na pravé straně je v logaritmu absolutní hodnota, neboť pro $x > 0$ je $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ a pro $x < 0$ je $[\ln(-x)]' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$.

# Plán přednášky

## Věta

(i) *Pravidlo konstantního násobku:*

$$\int c\,.\,f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx.$$

*Neboli, je-li $F(x)$ primitivní k $f(x)$, potom je $c\,.\,F(x)$ primitivní k $c\,.\,f(x)$.*

## Věta

(i) *Pravidlo konstantního násobku:*

$$\int c\,.\,f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx.$$

*Neboli, je-li $F(x)$ primitivní k $f(x)$, potom je $c\,.\,F(x)$ primitivní k $c\,.\,f(x)$.*

(ii) *Pravidlo součtu a rozdílu:*

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

*Neboli, je-li $F(x)$ primitivní k $f(x)$ a je-li $G(x)$ primitivní k $g(x)$, potom je $F(x) \pm G(x)$ primitivní k $f(x) \pm g(x)$.*

# Metoda per partes

Metoda pro integraci per partes (= po částech) je jednoduchým důsledkem pravidla pro derivaci součinu. Toto integrační pravidlo umožňuje integrovat součiny funkcí, přičemž integrál z daného součinu se vhodně převede na integrál z jednoduššího součinu.

**Věta**

*Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají derivaci na intervalu $I$. Potom platí*

$$\int u'(x)\,.\,v(x)\,dx = u(x)\,.\,v(x) - \int u(x)\,.\,v'(x)\,dx.$$

# Metoda per partes

Metoda pro integraci per partes (= po částech) je jednoduchým důsledkem pravidla pro derivaci součinu. Toto integrační pravidlo umožňuje integrovat součiny funkcí, přičemž integrál z daného součinu se vhodně převede na integrál z jednoduššího součinu.

**Věta**

*Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají derivaci na intervalu $I$. Potom platí*

$$\int u'(x) \,.\, v(x)\, dx = u(x) \,.\, v(x) - \int u(x) \,.\, v'(x)\, dx.$$

**Důkaz.**

Tato metoda je jednoduchým důsledkem pravidla pro derivaci součinu: $[u\,v]' = u'\,v + u\,v'$, $\Rightarrow \int [u\,v]' = \int (u'\,v + u\,v') \Rightarrow u\,v = \int u'\,v + \int u\,v'$. $\square$

Příslušné výpočty pro metodu per partes se často ve výpočtu zapisují mezi dvě svislé čáry.

## Příklad

$$\int x \cos x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u' = \cos x & u = \sin x \\ v = x & v' = 1 \end{array} \right| = x \sin x - \int \sin x \, dx =$$

$$= x \sin x - (-\cos x) + C = x \sin x + \cos x + C.$$

Příslušné výpočty pro metodu per partes se často ve výpočtu zapisují mezi dvě svislé čáry.

**Příklad**

$$\int x \cos x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u' = \cos x & u = \sin x \\ v = x & v' = 1 \end{array} \right| = x \sin x - \int \sin x \, dx =$$
$$= x \sin x - (-\cos x) + C = x \sin x + \cos x + C.$$

**Příklad**

$$\int x \ln x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u' = x & u = \frac{x^2}{2} \\ v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx =$$
$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Metoda per partes občas vyžaduje i použití některých (i když dnes už dostatečně *profláknutých*) triků:

## Příklad

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \, . \ln x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u' = 1 & u = x \\ v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \end{array} \right| =$$

$$= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C.$$

## Příklad

$$\underbrace{\int e^x \sin x \, dx}_{\text{označme jako } I} = \left| \begin{array}{ll} u' = e^x & u = e^x \\ v = \sin x & v' = \cos x \end{array} \right| =$$

$$= e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u' = e^x & u = e^x \\ v = \cos x & v' = -\sin x \end{array} \right| =$$

$$= e^x \sin x - \left\{ e^x \cos x - \int e^x (-\sin x) \, dx \right\} =$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \underbrace{\int e^x \sin x \, dx}_{=I},$$

pro neznámý integrál $I$ tedy dostáváme rovnici
$I = e^x (\sin x - \cos x) - I$, odkud snadno dopočteme
$I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x)$.

## Poznámka

- Metoda per-partes vede k cíli zejména pro integrály typu

$$\int x^n\, e^{ax}\, dx, \quad \int x^n \cos(ax)\, dx, \quad \int x^n \sin(ax)\, dx,$$

$$\int x^n \operatorname{arctg}(ax)\, dx, \quad \int x^n \operatorname{arccotg}(ax)\, dx, \quad \int x^a \ln^n x\, dx.$$

## Poznámka

- Metoda per-partes vede k cíli zejména pro integrály typu

$$\int x^n e^{ax}\,dx,\quad \int x^n \cos(ax)\,dx,\quad \int x^n \sin(ax)\,dx,$$

$$\int x^n \operatorname{arctg}(ax)\,dx,\quad \int x^n \operatorname{arccotg}(ax)\,dx,\quad \int x^a \ln^n x\,dx.$$

- Metoda per-partes vede někdy na rovnici pro neznámý integrál, např.

$$\int e^{ax} \cos(bx)\,dx,\quad \int e^{ax} \sin(bx)\,dx.$$

## Poznámka

- Metoda per-partes vede k cíli zejména pro integrály typu

$$\int x^n e^{ax}\,dx, \quad \int x^n \cos(ax)\,dx, \quad \int x^n \sin(ax)\,dx,$$

$$\int x^n \operatorname{arctg}(ax)\,dx, \quad \int x^n \operatorname{arccotg}(ax)\,dx, \quad \int x^a \ln^n x\,dx.$$

- Metoda per-partes vede někdy na rovnici pro neznámý integrál, např.

$$\int e^{ax} \cos(bx)\,dx, \quad \int e^{ax} \sin(bx)\,dx.$$

- Metoda per-partes vede někdy na rekurentní formuli pro neznámý integrál (viz následující příklad).

## Příklad

Určete

$$K_n(x) := \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx.$$

## Příklad

Určete
$$K_n(x) := \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx.$$

## Řešení

$$\begin{aligned}
K_n(x) &= \left|\begin{array}{ll} u' = 1 & u = x \\ v = (x^2+1)^{-n} & v' = -n(x^2+1)^{-n-1}\,.\,2x \end{array}\right| \\
&= x\,(x^2+1)^{-n} - \int x\,.\,(-n)\,(x^2+1)^{-n-1}\,.\,2x\,dx \\
&= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx \\
&= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int \left(\frac{1}{(x^2+1)^n} - \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\right) dx \\
&= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\,[K_n(x) - K_{n+1}(x)].
\end{aligned}$$

## Příklad (Dokončení)

Z rovnice snadno dopočteme $K_{n+1}(x) = \frac{1}{2n} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} \cdot K_n(x)$, odkud je pak možné iterativně počítat hodnoty $K_n$, např. volbou $n = 1$ vypočítáme integrál $K_2(x)$:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \cdot K_1(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

# Substituční metoda

Další dvě metody (obě jsou nazývány *substituční*) jsou založeny na pravidle pro derivování složené funkce.

# Substituční metoda

Další dvě metody (obě jsou nazývány *substituční*) jsou založeny na pravidle pro derivování složené funkce.

## Věta (Substituce pro neurčitý integrál)

*Nechť je funkce $f(t)$ definovaná na intervalu $I$ a nechť $\varphi(x)$ je definovaná na intervalu $J$ a $\varphi(J) \subseteq I$. Je-li funkce $F(t)$ primitivní k funkci $f(t)$ na intervalu $I$, potom je funkce $(F \circ \varphi)(x)$ primitivní k funkci $[(f \circ \varphi)(x)] \,.\, \varphi'(x)$ na intervalu $J$, tj.*

$$\int f(\varphi(x)) \,.\, \varphi'(x)\, dx = \int f(t)\, dt \quad \Big[ = F(t) = F(\varphi(x)) \Big].$$

*Neboli v daném integrálu volíme substituci* $\boxed{t = \varphi(x)}$.

# Substituční metoda

Další dvě metody (obě jsou nazývány *substituční*) jsou založeny na pravidle pro derivování složené funkce.

## Věta (Substituce pro neurčitý integrál)

*Nechť je funkce $f(t)$ definovaná na intervalu $I$ a nechť $\varphi(x)$ je definovaná na intervalu $J$ a $\varphi(J) \subseteq I$. Je-li funkce $F(t)$ primitivní k funkci $f(t)$ na intervalu $I$, potom je funkce $(F \circ \varphi)(x)$ primitivní k funkci $[(f \circ \varphi)(x)] \cdot \varphi'(x)$ na intervalu $J$, tj.*

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\, dx = \int f(t)\, dt \quad \Big[ = F(t) = F(\varphi(x)) \Big].$$

*Neboli v daném integrálu volíme substituci* $\boxed{t = \varphi(x)}$.

## Důkaz.

$$[F(\varphi(x))]' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x). \qquad \square$$

Substituční metodu budeme opět zapisovat do našeho výpočtu mezi dvě svislé čáry.

## Příklad

$$\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx = \left|\begin{array}{l} t = x^2+1 \\ dt = 2x\,dx \end{array}\right| = \int \frac{1}{t^2}\,dt = \int t^{-2}\,dt =$$
$$= \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{x^2+1} + C$$

Substituční metodu budeme opět zapisovat do našeho výpočtu mezi dvě svislé čáry.

## Příklad

$$\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx = \left|\begin{array}{l} t = x^2+1 \\ dt = 2x\,dx \end{array}\right| = \int \frac{1}{t^2}\,dt = \int t^{-2}\,dt =$$

$$= \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{x^2+1} + C$$

## Příklad

$$\int x^2 \cos x^3\,dx = \left|\begin{array}{l} t = x^3 \\ dt = 3x^2\,dx \end{array}\right| = \frac{1}{3}\int \cos t\,dt =$$

$$= \frac{1}{3}\sin t + C = \frac{1}{3}\sin x^3 + C.$$

# Substituce podruhé

## Věta (Substituce pro neurčitý integrál)

*Nechť je funkce $f(x)$ definovaná na intervalu $I$ a nechť $\psi(t)$ má nenulovou derivaci na intervalu $J$ a $\psi(J) = I$. Je-li funkce $F(t)$ primitivní k funkci $[(f \circ \psi)(t)] \,.\, \psi'(t)$ na intervalu $J$, potom je funkce $(F \circ \psi^{-1})(x)$ primitivní k funkci $f(x)$ na intervalu $I$, tj.*

$$\int f(x)\,dx = \int f(\psi(t))\,.\,\psi'(t)\,dt = \quad \Big[ = F(t) = F(\psi^{-1}(x)) \Big].$$

*Neboli v daném integrálu volíme substituci $\boxed{x = \psi(t)}$, tj. $t = \psi^{-1}(x)$ (inverzní funkce).*

## Poznámka

Všimněme si, že ve vzorcích pro integraci pomocí substituce **v obou případech** vystupuje diferenciál funkce:

- $t = \varphi(x) \quad \Rightarrow \quad dt = \varphi'(x)\, dx.$
- $x = \psi(t) \quad \Rightarrow \quad dx = \psi'(t)\, dt.$

Rozdíl mezi oběma metodami je v tom, že v prvním případě je nová proměnná funkcí původní proměnné, ve druhém případě je tomu naopak.

## Příklad

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \left|\begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = (\cos t)\,dt \end{array}\right| =$$

$$= \int \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{=\cos t} \cdot \underbrace{\cos t\,dt}_{dx} =$$

$$= \int \cos^2 t\,dt = \int \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)\right) dt =$$

$$= \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(2t)}{2} + C = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}(\sin t)(\cos t) + C =$$

$$= \frac{t}{2} + \frac{1}{2}(\sin t)\sqrt{1-\sin^2 t} + C = \left| \ t = \arcsin x \ \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C.$$

# Racionální lomené funkce

Je-li $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\text{polynom}}{\text{polynom}}$ racionální lomená funkce, provedeme nejprve dělení, abychom dostali *ryze* lomenou funkci.

## Příklad

$$\frac{x^3 + x^2}{x^2 + 1} = \underbrace{x + 1}_{\substack{\text{umíme} \\ \text{integrovat}}} - \frac{x + 1}{x^2 + 1}$$

# Racionální lomené funkce

Je-li $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\text{polynom}}{\text{polynom}}$ racionální lomená funkce, provedeme nejprve dělení, abychom dostali *ryze* lomenou funkci.

## Příklad

$$\frac{x^3 + x^2}{x^2 + 1} = \underbrace{x + 1}_{\substack{\text{umíme} \\ \text{integrovat}}} - \frac{x + 1}{x^2 + 1}$$

Dále ryze racionální lomenou funkci rozložíme na *parciální zlomky*, které mají jeden z následujících tvarů.

## Parciální zlomky

- Pro *reálný jednoduchý kořen* $x_0$:

$$\frac{A}{x - x_0}, \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{A}{x - x_0}\, dx = A \ln |x - x_0|.$$

## Parciální zlomky

- Pro *reálný jednoduchý kořen* $x_0$:

$$\frac{A}{x-x_0}, \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{A}{x-x_0}\,dx = A\ln|x-x_0|.$$

- Pro *reálný vícenásobný kořen* $x_0$ $(n \geq 2)$:

$$\frac{A}{(x-x_0)^n}, \quad \frac{B}{(x-x_0)^{n-1}}, \quad \dots, \frac{C}{x-x_0} \qquad \Rightarrow \qquad \text{pro } k \geq 2:$$

$$A\int (x-x_0)^{-k}\,dx = A\,\frac{(x-x_0)^{-k+1}}{-k+1} = \frac{A}{(1-k)\,(x-x_0)^{k-1}}.$$

## další typ parciálních zlomků

Pro dvojici *jednoduchých komplexně sdružených kořenů* $\alpha \pm \beta i$:

$$\frac{Bx + C}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}, \qquad \Rightarrow \qquad \int \frac{Bx + C}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}\, dx$$

Výraz ve jmenovateli upravíme vytýkáním na tvar $t^2 + 1$, kde $t = \frac{x-\alpha}{\beta}$. Výsledný integrál je po této substituci tvaru

$$\int \frac{Dt + E}{t^2 + 1}\, dt = D \int \frac{t}{t^2+1}\, dt + E \int \frac{1}{t^2+1}\, dt =$$
$$= \frac{D}{2} \ln(t^2 + 1) + E \operatorname{arctg} t.$$

## poslední typ parciálních zlomků

Pro dvojici *vícenásobných komplexně sdružených kořenů* $\alpha \pm \beta i$ $(n \geq 2)$:

$$\frac{Bx + C}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^n}, \quad \frac{Dx + E}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^{n-1}}, \quad \dots, \quad \frac{Fx + G}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \text{pro } k = 2, \dots, n\text{: } \int \frac{Bx + C}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^k}\, dx$$

Výraz ve jmenovateli upravíme vytýkáním na tvar $(t^2+1)^k$, kde $t = \frac{x-\alpha}{\beta}$. Výsledný integrál je po této substituci tvaru

$$\int \frac{Ht + J}{(t^2+1)^k}\, dt = H \int \frac{t}{(t^2+1)^k}\, dt + J \int \frac{1}{(t^2+1)^k}\, dt,$$

přičemž první z uvedených integrálů vypočteme substitucí $s = t^2 + 1$ (potom $ds = 2t\, dt$) a druhý z uvedených integrálů je integrál $K_n(x)$ z dříve řešeného příkladu (přesněji v tomto případě $K_k(t)$), který vede na rekurentní formuli.

## Příklad

Vypočtěte

$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 5}{(x+1)^2\,(x^2+4)}\,dx.$$

## Příklad

Vypočtěte
$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 5}{(x+1)^2 (x^2+4)} \, dx.$$

## Řešení

Rozkladem na parciální zlomky zjistíme
$$\frac{x^3 + 6x^2 + 5}{(x+1)^2 (x^2+4)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx + D}{x^2+4}.$$

## Příklad

Vypočtěte
$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 5}{(x+1)^2\,(x^2+4)}\,dx.$$

## Řešení

Rozkladem na parciální zlomky zjistíme
$$\frac{x^3 + 6x^2 + 5}{(x+1)^2\,(x^2+4)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

Odsud plyne, že $A = 2$, $B = -1$, $C = 2$, $D = 1$ a tedy je
$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 5}{(x+1)^2\,(x^2+4)}\,dx = \int \left(\frac{2}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{2x+1}{x^2+4}\right) dx$$
$$= \frac{-2}{x+1} - \ln|x+1| + \int \frac{2x}{x^2+4}\,dx + \int \frac{1}{x^2+4}\,dx$$
$$= \frac{-2}{x+1} - \ln|x+1| + \ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.$$

## Poznámka

- Mnoho dalších typů integrálů vede přes vhodné substituce na integrály z racionálních lomených funkcí, některé ukázky jsou ve skriptech.

## Poznámka

- Mnoho dalších typů integrálů vede přes vhodné substituce na integrály z racionálních lomených funkcí, některé ukázky jsou ve skriptech.
- Někdy ani nelze daný integrál vůbec spočítat (tj. vyjádřit pomocí elementárních funkcí), např.

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx,\ \int \frac{\cos x}{x}\,dx,\ \int \frac{x}{\ln x}\,dx,\ \int \sin(x^2)\,dx,$$

$$\int \cos(x^2)\,dx,\ \int \frac{e^x}{x}\,dx,\ \int e^{x^2}\,dx.$$

Z věty o existenci primitivní funkce ale víme, že k uvedeným funkcím *existuje* primitivní funkce, protože tyto funkce jsou spojité. Tyto primitivní funkce se pak nazývají *vyšší funkce* (jsou nevyjádřitelné pomocí elementárních funkcí).

## Poznámka

- Mnoho dalších typů integrálů vede přes vhodné substituce na integrály z racionálních lomených funkcí, některé ukázky jsou ve skriptech.
- Někdy ani nelze daný integrál vůbec spočítat (tj. vyjádřit pomocí elementárních funkcí), např.

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx,\ \int \frac{\cos x}{x}\,dx,\ \int \frac{x}{\ln x}\,dx,\ \int \sin(x^2)\,dx,$$

$$\int \cos(x^2)\,dx,\ \int \frac{e^x}{x}\,dx,\ \int e^{x^2}\,dx.$$

  Z věty o existenci primitivní funkce ale víme, že k uvedeným funkcím *existuje* primitivní funkce, protože tyto funkce jsou spojité. Tyto primitivní funkce se pak nazývají *vyšší funkce* (jsou nevyjádřitelné pomocí elementárních funkcí).
- Pozor ale na $\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\ln^2 x + C$, (není to vyšší funkce)!

# Plán přednášky

1. Primitivní funkce
2. Základní integrační metody
   - Metoda per partes
   - Substituční metody
   - Integrování racionálních lomených funkcí
3. Riemannův integrál

**Bernhard Riemann** (1826 – 1866) – jeden z nejvýznamnějších matematiků celé historie (nejen matematické analýzy) – viz http://en.wikipedia.org/wiki/Bernhard_Riemann

V této části budou uvažované funkce vždy **ohraničené**.

Základní otázka zní: Jaká je plocha mezi $f(x)$ a osou $x$ (na intervalu $[a, b]$)?

# Obsah plochy

## Příklad

(a) $f(x) = 2$ pro $x \in [-1, 1]$, $P = 4$.

# Obsah plochy

## Příklad

(a) $f(x) = 2$ pro $x \in [-1, 1]$, $P = 4$.

(b) $f(x) = k$ pro $x \in [a, b]$, $P = k\,(b - a)$.

# Obsah plochy

## Příklad

(a) $f(x) = 2$ pro $x \in [-1, 1]$, $P = 4$.

(b) $f(x) = k$ pro $x \in [a, b]$, $P = k\,(b - a)$.

(c) $f(x) = x$ pro $x \in [0, 4]$, $P = \frac{1}{2}\,4^2 = 8$.

# Obsah plochy

## Příklad

(a) $f(x) = 2$ pro $x \in [-1, 1]$, $P = 4$.

(b) $f(x) = k$ pro $x \in [a, b]$, $P = k\,(b - a)$.

(c) $f(x) = x$ pro $x \in [0, 4]$, $P = \frac{1}{2}\,4^2 = 8$.

(d) $f(x) = x$ pro $x \in [2, 4]$, $P = \frac{1}{2}\,4^2 - \frac{1}{2}\,2^2 = 8 - 2 = 6$.

# Obsah plochy

## Příklad

(a) $f(x) = 2$ pro $x \in [-1, 1]$, $P = 4$.

(b) $f(x) = k$ pro $x \in [a, b]$, $P = k\,(b - a)$.

(c) $f(x) = x$ pro $x \in [0, 4]$, $P = \frac{1}{2}\,4^2 = 8$.

(d) $f(x) = x$ pro $x \in [2, 4]$, $P = \frac{1}{2}\,4^2 - \frac{1}{2}\,2^2 = 8 - 2 = 6$.

(e) $f(x) = x$ pro $x \in [a, b]$, $P = \frac{1}{2}\,b^2 - \frac{1}{2}\,a^2$.

# Obsah plochy

## Příklad

(a) $f(x) = 2$ pro $x \in [-1, 1]$, $P = 4$.

(b) $f(x) = k$ pro $x \in [a, b]$, $P = k\,(b - a)$.

(c) $f(x) = x$ pro $x \in [0, 4]$, $P = \frac{1}{2}\,4^2 = 8$.

(d) $f(x) = x$ pro $x \in [2, 4]$, $P = \frac{1}{2}\,4^2 - \frac{1}{2}\,2^2 = 8 - 2 = 6$.

(e) $f(x) = x$ pro $x \in [a, b]$, $P = \frac{1}{2}\,b^2 - \frac{1}{2}\,a^2$.

(f) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ pro $x \in [-1, 1]$, $P = \frac{1}{2}\,\pi\,1^2 = \frac{\pi}{2}$.

# Obsah plochy

**Příklad**

(a) $f(x) = 2$ pro $x \in [-1, 1]$, $P = 4$.

(b) $f(x) = k$ pro $x \in [a, b]$, $P = k\,(b - a)$.

(c) $f(x) = x$ pro $x \in [0, 4]$, $P = \frac{1}{2}\,4^2 = 8$.

(d) $f(x) = x$ pro $x \in [2, 4]$, $P = \frac{1}{2}\,4^2 - \frac{1}{2}\,2^2 = 8 - 2 = 6$.

(e) $f(x) = x$ pro $x \in [a, b]$, $P = \frac{1}{2}\,b^2 - \frac{1}{2}\,a^2$.

(f) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ pro $x \in [-1, 1]$, $P = \frac{1}{2}\,\pi\,1^2 = \frac{\pi}{2}$.

(g) $f(x) = -2x + 1$ pro $x \in [1, 2]$, $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 2$. Ale protože je plocha *pod osou* $x$, klademe $P = -2$.

# Obsah plochy

## Příklad

(a) $f(x) = 2$ pro $x \in [-1, 1]$, $P = 4$.

(b) $f(x) = k$ pro $x \in [a, b]$, $P = k\,(b - a)$.

(c) $f(x) = x$ pro $x \in [0, 4]$, $P = \frac{1}{2}\,4^2 = 8$.

(d) $f(x) = x$ pro $x \in [2, 4]$, $P = \frac{1}{2}\,4^2 - \frac{1}{2}\,2^2 = 8 - 2 = 6$.

(e) $f(x) = x$ pro $x \in [a, b]$, $P = \frac{1}{2}\,b^2 - \frac{1}{2}\,a^2$.

(f) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ pro $x \in [-1, 1]$, $P = \frac{1}{2}\,\pi\,1^2 = \frac{\pi}{2}$.

(g) $f(x) = -2x + 1$ pro $x \in [1, 2]$, $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 2$. Ale protože je plocha *pod osou* $x$, klademe $P = -2$.

(h) $f(x) = x^3$ pro $x \in [-1, 1]$, plocha je stejná nad i pod osou $x$, a proto klademe $P = 0$.

# Riemannův integrál

Pro definici integrálu využijeme přímo intuitivní úvahy, kterými jsme v minulé přednášce odůvodňovali souvislost Newtonova integrálu s velikostí plochy.

# Riemannův integrál

Pro definici integrálu využijeme přímo intuitivní úvahy, kterými jsme v minulé přednášce odůvodňovali souvislost Newtonova integrálu s velikostí plochy.

*Skutečnou plochu* mezi $f(x)$ a osou $x$ odhadneme pomocí „vepsaných“ a „opsaných“ obdélníků, čímž dostaneme *dolní odhad* $s(D, f)$ pro skutečnou plochu a *horní odhad* $S(D, f)$ pro skutečnou plochu.

## Definice (dělení intervalu)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *Dělením* intervalu $[a, b]$ je konečná množina bodů $D \subseteq [a, b]$ s vlastností $a, b \in D$. Tedy

$$D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \qquad \text{kde} \qquad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Body $x_0, x_1, \dots, x_n$ se nazývají *dělící body* a interval $[x_{k-1}, x_k]$ se nazývá *dělící (pod)interval*.

## Definice (dělení intervalu)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. *Dělením* intervalu $[a, b]$ je konečná množina bodů $D \subseteq [a, b]$ s vlastností $a, b \in D$. Tedy

$$D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \quad \text{kde} \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Body $x_0, x_1, \dots, x_n$ se nazývají *dělící body* a interval $[x_{k-1}, x_k]$ se nazývá *dělící (pod)interval.*
Délka největšího dělícího podintervalu je pak *norma dělení D*, tj. je to číslo

$$n(D) := \max_{k=1,\dots,n} \{x_k - x_{k-1}\}. \tag{1}$$

Množinu všech dělení intervalu $[a, b]$ označujeme jako $\mathcal{D}[a, b]$ či jenom jako $\mathcal{D}$.

Pro funkci $f(x)$ na $[a, b]$ a dělení $D$ intervalu $[a, b]$ zaveďme

$$m_k := \inf\left\{f(x),\ x \in [x_{k-1}, x_k]\right\}, M_k := \sup\left\{f(x),\ x \in [x_{k-1}, x_k]\right\}$$

$$s(D, f) := \sum_{k=1}^{n} m_k\,(x_k - x_{k-1}), \qquad \textit{dolní součet } f(x) \text{ při dělení } D,$$

$$S(D, f) := \sum_{k=1}^{n} M_k\,(x_k - x_{k-1}), \qquad \textit{horní součet } f(x) \text{ při dělení } D.$$

Pro funkci $f(x)$ na $[a, b]$ a dělení $D$ intervalu $[a, b]$ zaveďme

$$m_k := \inf\left\{f(x),\ x \in [x_{k-1}, x_k]\right\}, M_k := \sup\left\{f(x),\ x \in [x_{k-1}, x_k]\right\}$$

$$s(D, f) := \sum_{k=1}^{n} m_k\,(x_k - x_{k-1}), \qquad \textit{dolní součet } f(x) \text{ při dělení } D,$$

$$S(D, f) := \sum_{k=1}^{n} M_k\,(x_k - x_{k-1}), \qquad \textit{horní součet } f(x) \text{ při dělení } D.$$

**Tvrzení**

*Nechť $c \leq f(x) \leq d$ pro každé $x \in [a, b]$. Potom pro každá dvě dělení $D_1, D_2 \in \mathcal{D}[a, b]$ platí*

$$c\,(b - a) \leq s(D_1, f) \leq S(D_2, f) \leq d\,(b - a),$$

*tj. dolní součet libovolného dělení je nejvýše roven hornímu součtu libovolného dělení, přičemž všechny dolní součty jsou zdola ohraničeny číslem $c\,(b - a)$ a všechny horní součty jsou shora ohraničeny číslem $d\,(b - a)$ .*

Při vzrůstajícím počtu dělících bodů $x_k$ v dělení $D_1$, $D_2$ se bude dolní součet $s(D_1, f)$ *zvětšovat* a zároveň horní součet $S(D_2, f)$ *zmenšovat*.

Při vzrůstajícím počtu dělících bodů $x_k$ v dělení $D_1$, $D_2$ se bude dolní součet $s(D_1, f)$ *zvětšovat* a zároveň horní součet $S(D_2, f)$ *zmenšovat*.

## Definice

Číslo

$$\underline{\int_a^b} f := \sup \left\{ s(D, f),\ D \in \mathcal{D} \right\}$$

nazýváme dolním (Riemannovým) integrálem z funkce $f(x)$ na intervalu $[a, b]$.
Číslo

$$\overline{\int_a^b} f := \inf \left\{ S(D, f),\ D \in \mathcal{D} \right\}$$

nazýváme horním (Riemannovým) integrálem z funkce $f(x)$ na intervalu $[a, b]$.

Současně víme, že vždy je $c\,(b-a) \le \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f \le d\,(b-a)$.

## Definice (Riemannův integrál)

Je-li
$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f,$$
potom říkáme, že funkce $f(x)$ je *integrovatelná* (v Riemannově smyslu) na $[a, b]$ a toto společné číslo značíme
$\int_a^b f := \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$
Množinu všech (Riemannovsky) integrovatelných funkcí na intervalu $[a, b]$ značíme jako $\mathcal{R}[a, b]$.

## Definice (Riemannův integrál)

Je-li
$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f,$$
potom říkáme, že funkce $f(x)$ je *integrovatelná* (v Riemannově smyslu) na $[a, b]$ a toto společné číslo značíme
$\int_a^b f := \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$
Množinu všech (Riemannovsky) integrovatelných funkcí na intervalu $[a, b]$ značíme jako $\mathcal{R}[a, b]$.
Je-li
$$\underline{\int_a^b} f < \overline{\int_a^b} f,$$
potom říkáme, že funkce $f(x)$ *není integrovatelná na* $[a, b]$.

## Definice (Riemannův integrál)

Je-li

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f,$$

potom říkáme, že funkce $f(x)$ je *integrovatelná* (v Riemannově smyslu) na $[a, b]$ a toto společné číslo značíme $\int_a^b f := \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$.
Množinu všech (Riemannovsky) integrovatelných funkcí na intervalu $[a, b]$ značíme jako $\mathcal{R}[a, b]$.
Je-li

$$\underline{\int_a^b} f < \overline{\int_a^b} f,$$

potom říkáme, že funkce $f(x)$ *není integrovatelná na* $[a, b]$.

Riemannův integrál přes interval $[a, b]$ je tedy *číslo*. Zápis pro Riemannův integrál budeme používat také ve tvaru s integrační proměnnou.

## Příklad

Pro *konstantní funkci* $f(x) = c$ máme $m_k = M_k = c$ pro všechny $k$ a tedy je

$$s(D,f) = c\,(b-a), \quad S(D,f) = c\,(b-a), \quad \forall D \in \mathcal{D}, \quad \Rightarrow$$

$$\int_a^b c = \underline{\int_a^b} k = \overline{\int_a^b} k = c\,(b-a).$$

## Příklad

*Dirichletova funkce* $\chi$ [chí]

$$\chi(x) := \begin{cases} 1, & \text{pro } x \in \mathbb{Q} \cap [a,b], \\ 0, & \text{pro } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [a,b], \end{cases}$$

Potom $m_k = 0$ a $M_k = 1$ pro všechna $k$ a tedy je

$$s(D,\chi) = 0, \quad S(D,\chi) = b - a, \quad \forall D \in \mathcal{D}, \quad \Rightarrow$$

$$\underline{\int_a^b} \chi = \sup\{s(D,\chi)\} = \sup\{0\} = 0,$$

$$\overline{\int_a^b} k = \inf\{S(D,\chi)\} = \inf\{b-a\} = b - a \quad \Rightarrow$$

$$0 = \underline{\int_a^b} \chi < \overline{\int_a^b} \chi = b - a, \quad \text{a tedy} \quad \chi \notin \mathcal{R}[a,b],$$

tj.$\chi$ není integrovatelná.

Jak obecně určíme, zda je daná funkce integrovatelná (a pak jakou hodnotu má její určitý integrál) či nikoliv?

**Definice**

*Nulová posloupnost dělení* $D_k \in \mathcal{D}$ je taková posloupnost dělení, která splňuje $n(D_k) \to 0$ pro $k \to \infty$, neboli norma dělení jde k nule.

Jak obecně určíme, zda je daná funkce integrovatelná (a pak jakou hodnotu má její určitý integrál) či nikoliv?

### Definice

*Nulová posloupnost dělení* $D_k \in \mathcal{D}$ je taková posloupnost dělení, která splňuje $n(D_k) \to 0$ pro $k \to \infty$, neboli norma dělení jde k nule.

### Věta

*Nechť je funkce $f(x)$ ohraničená na intervalu $[a, b]$. Potom pro libovolnou nulovou posloupnost dělení $D_k \in \mathcal{D}$ platí, že*

$$s(D_k, f) \to \underline{\int_a^b} f, \qquad S(D_k, f) \to \overline{\int_a^b} f, \qquad \text{pro } k \to \infty.$$

*Je-li navíc $f(x)$ integrovatelná na $[a, b]$, potom dolní součty $s(D_k, f)$ i horní součty $S(D_k, f)$ konvergují (ve smyslu existence vlastní limity) k číslu $\int_a^b f$.*

Z této věty vyplývá, že *pokud víme*, že je $f(x)$ integrovatelná na $[a, b]$, potom lze $\int_a^b f$ určit limitním přechodem pomocí *libovolné* nulové posloupnosti dělení intervalu $[a, b]$.
Zásadní otázku, které funkce jsou vlastně (Riemannovsky) integrovatelné, zodpovídá následující tvrzení.

**Věta**

(i) *Každá spojitá funkce na intervalu $[a, b]$ je zde také integrovatelná, neboli*

$$C[a, b] \subseteq \mathbb{R}[a, b].$$

(ii) *Každá monotónní funkce na intervalu $[a, b]$ je zde také integrovatelná.*

## Poznámka

Riemannův integrál (tj. vlastně orientovaná plocha) se zřejmě *nezmění*, pokud je *integrovatelná* funkce $f(x)$ nespojitá či není definována v konečně mnoha bodech (či obecněji na množině „míry nula“), viz obr. Tímto dostáváme určitý integrál přes otevřený nebo polouzavřený interval. Zejména pro (ohraničené) intervaly všech typů $(a, b)$, $(a, b]$ i $[a, b)$ je příslušný určitý integrál přes tento interval roven již dříve definovanému číslu $\int_a^b f$, tj. Riemannově integrálu přes uzavřený interval $[a, b]$.

## Poznámka

Riemannův integrál (tj. vlastně orientovaná plocha) se zřejmě *nezmění*, pokud je *integrovatelná* funkce $f(x)$ nespojitá či není definována v konečně mnoha bodech (či obecněji na množině „míry nula"), viz obr. Tímto dostáváme určitý integrál přes otevřený nebo polouzavřený interval. Zejména pro (ohraničené) intervaly všech typů $(a, b)$, $(a, b]$ i $[a, b)$ je příslušný určitý integrál přes tento interval roven již dříve definovanému číslu $\int_a^b f$, tj. Riemannově integrálu přes uzavřený interval $[a, b]$.

## Příklad

Pro nespojitou funkci $\operatorname{sgn} x$ platí $\int_{-2}^{3} \operatorname{sgn} x \, dx = 3 + (-2) = 1$.
Obdobně lze ukázat, že pro $a < 0 < b$ je $\int_a^b \operatorname{sgn} x \, dx = a + b$.