Matematika II – 8. přednáška
Aplikace určitého integrálu, nevlastní integrály, přibližné výpočty

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

16. 11. 2011

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB102`, *e*-text.

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB102`, *e*-text.

Plán přednášky

Věty o střední hodnotě

Stejně tak jako má diferenciální počet své věty o střední hodnotě podobné věty důležité i v integrálním počtu.
Začněme následujícím motivačním příkladem. Pokud máme *konečně mnoho* čísel $a_1, \ldots, a_n$, potom jejich *průměrná hodnota* je

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Tedy průměrná hodnota čísel $f(c_1), \ldots, f(c_n)$ je pak

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(c_k).$$

Položme si otázku, co by se stalo, kdybychom nahradili konečně mnoho čísel $f(c_1), \ldots, f(c_n)$ *nekonečně mnoha* funkčními hodnotami $f(x)$, tj. analyzujme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \cdot \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\text{délka dělících subintervalů}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a} \cdot \Big(\text{Riemannův součet, ale místo } m_k \text{ či } M_k \text{ je zde } f(c_k)\Big)$$

$$\to \frac{1}{b-a} \int_a^b f.$$

Definice (Průměr funkce)

Nechť $f \in \mathbb{R}[a, b]$. Potom číslo

$$av(f) = av_{[a,b]}(f) := \frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

nazýváme *průměrnou hodnotou* (též střední hodnotou) funkce $f(x)$ na intervalu $[a, b]$. Označení je z angličtiny „average value“.

Příklad

(a) Pro funkci $f(x) = c$ na intervalu $[a, b]$ platí

$$av(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b c\, dx = \frac{1}{b-a} \cdot c\,(b-a) = c,$$

tj. průměrná hodnota konstantní funkce je samozřejmě tatáž konstanta.

(b) Pro funkci $f(x) = x$ na intervalu $[a, b]$ platí

$$av(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b x\, dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{b+a}{2}.$$

(c) Pro funkci $f(x) = x^2$ na intervalu $[0, 1]$ platí

$$av(f) = \frac{1}{1-0} \int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}.$$

V dalším textu označme

$$m := \inf \left\{ f(x),\ x \in [a,b] \right\}, \quad M := \sup \left\{ f(x),\ x \in [a,b] \right\},$$

tj. platí pak $m \le f(x) \le M$ na intervalu $[a,b]$.

Věta

(i) *Nechť $f \in \mathbb{R}[a,b]$. Potom existuje číslo $c \in \mathbb{R}$, $m \le c \le M$, takové, že*

$$\int_a^b f = c\,(b-a), \quad tj. \quad c = av(f),$$

tj. plocha mezi grafem funkce $f(x)$ a osou x je rovna obsahu obdélníka se základnou $[a,b]$ a výškou c.

(ii) *Je-li navíc funkce $f(x)$ spojitá na $[a,b]$, potom existuje bod $x_0 \in [a,b]$ s vlastností, že $f(x_0) = c = av(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$, tj. spojitá funkce $f(x)$ nabývá svou průměrnou hodnotu v intervalu $[a,b]$.*

Příklad

Funkce $f(x) = 4 - x^2$ má na intervalu $[0, 3]$ průměrnou hodnotu

$$av(f) = \frac{1}{3}\int_0^3 (4-x^2)\,dx = \frac{1}{3}\left(\int_0^3 4\,dx - \int_0^3 x^2\,dx\right) = \frac{1}{3}\cdot(12-9) = 1.$$

Podle Věty tedy pro číslo $c = av(f) = 1$ platí, že

$$\int_0^3 (4 - x^2)\,dx = c\,(b - a) = 1 \cdot 3 = 3.$$

Dále, protože je funkce $4 - x^2$ *spojitá* na intervalu $[0, 3]$, existuje podle Věty bod $x_0 \in [0, 3]$ s vlastností, že $f(x_0) = 4 - x_0^2 = 1$. Zřejmě se jedná o bod $x_0 = \sqrt{3}$.

Plán přednášky

Obsah plochy mezi dvěma grafy

Víme, že určitý integrál $\int_a^b f$ byl zkonstruován jako *orientovaná* plocha mezi grafem funkce $f(x)$ a osou x na intervalu $[a, b]$. Tato *orientovaná* plocha je zřejmě rovna skutečné ploše, pokud je $f(x) \geq 0$ na $[a, b]$.

Obsah plochy mezi dvěma grafy

Víme, že určitý integrál $\int_a^b f$ byl zkonstruován jako *orientovaná* plocha mezi grafem funkce $f(x)$ a osou x na intervalu $[a, b]$. Tato *orientovaná* plocha je zřejmě rovna skutečné ploše, pokud je $f(x) \geq 0$ na $[a, b]$.

Pokud nás zajímá velikost plochy mezi grafy funkcí $f(x)$ a $g(x)$, určíme ji pomocí vepsaných a opsaných obdélníků (stejně jako při konstrukci Riemannova integrálu), avšak nyní bude obsah každého takového obdélníka tvaru $[f(c_k) - g(c_k)]\,(x_k - x_{k-1})$, Riemannův součet je pak

$$\sum_{k=1}^{n}[f(c_k) - g(c_k)]\,(x_k - x_{k-1}).$$

Tyto úvahy vedou k odvození následujícího vzorce.

Věta (plocha mezi grafy)

Nechť $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ a $f(x) \geq g(x)$ na $[a, b]$. Potom má plocha mezi grafy těchto funkcí na intervalu $[a, b]$ velikost

$$P = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx = \int_a^b [\text{ horní funkce } - \text{ dolní funkce }]\, dx.$$

Věta (plocha mezi grafy)

Nechť $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ a $f(x) \geq g(x)$ na $[a,b]$. Potom má plocha mezi grafy těchto funkcí na intervalu $[a,b]$ velikost

$$P = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b [\text{ horní funkce } - \text{ dolní funkce }]\,dx.$$

Příklad

Určete plochu mezi grafy funkcí $y = \sin x$ a $y = 2\sin x$ na intervalu $[\pi, 2\pi]$.

Věta (plocha mezi grafy)

Nechť $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ a $f(x) \geq g(x)$ na $[a,b]$. Potom má plocha mezi grafy těchto funkcí na intervalu $[a,b]$ velikost

$$P = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx = \int_a^b [\ \textit{horní funkce}\ -\ \textit{dolní funkce}\ ]\, dx.$$

Příklad

Určete plochu mezi grafy funkcí $y = \sin x$ a $y = 2\sin x$ na intervalu $[\pi, 2\pi]$.

Řešení

Oba grafy se protínají v bodech $x = \pi$ a $x = 2\pi$, přičemž funkce $y = \sin x$ je horní funkce na tomto intervalu. Proto

$$P = \int_\pi^{2\pi} (\sin x - 2\sin x)\, dx = \int_\pi^{2\pi} (-\sin x)\, dx = \Big[\cos x\Big]_\pi^{2\pi}$$
$$= \cos 2\pi - \cos \pi = 1 - (-1) = 2.$$

Délka křivky

Křivka C v rovině, $C : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$, je zadána parametricky jako zobrazení $C : \ t \mapsto [x(t), y(t)]$.

Příklad

Křivka $C : \ t \mapsto [\cos t, \sin t]$ pro $t \in [0, 2\pi]$ je kružnice o poloměru $r = 1$ se středem v počátku.

Délka křivky

Křivka C v rovině, $C:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^2$, je zadána parametricky jako zobrazení $C:\ t\mapsto[x(t),y(t)]$.

Příklad

Křivka $C:\ t\mapsto[\cos t,\sin t]$ pro $t\in[0,2\pi]$ je kružnice o poloměru $r=1$ se středem v počátku.

Věta (Délka křivky v rovině)

Nechť C je křivka v rovině a $[x(t),y(t)]$ pro $t\in[\alpha,\beta]$ její parametrizace. Mají-li souřadné funkce $x(t)$ a $y(t)$ spojitou derivaci na intervalu $[\alpha,\beta]$, potom má křivka C konečnou délku a platí

$$d(C)=\int_\alpha^\beta\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt.$$

Odvození předchozího vztahu pomocí dělení je obdobné jako u obsahu plochy. Intuitivně lze s využitím Pythagorovy věty argumentovat takto: Představme si křivku C jako dráhu pohybu v čase t. Derivací tohoto zobrazení dostaneme hodnoty, které budou odpovídat rychlosti pohybu po takovéto dráze. Proto celková délka křivky (tj. dráha uražená za dobu mezi hodnotami $t = a$, $t = b$) bude dána integrálem přes interval $[a, b]$, kde integrovanou funkcí je dráha uražená za *nekonečně malý čas* $\mathrm{d}t$. Ta je podle Pythagorovy věty rovna $\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t$, a odtud dostáváme požadovaný výsledek.

Příklad

Určete obvod kružnice o poloměru $r > 0$.

Příklad

Určete obvod kružnice o poloměru $r > 0$.

Řešení

Kružnice má parametrizaci $[x(t), y(t)] = [r\cos t, r\sin t]$ pro $t \in [0, 2\pi]$. Tyto funkce mají spojitou derivaci $[x'(t), y'(t)] = [-r\sin t, r\cos t]$ na $[0, 2\pi]$, a proto je obvod kružnice roven

$$d = \int_0^{2\pi} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)}\, dt = \int_0^{2\pi} r\, dt = \left[\, r\, t\,\right]_0^{2\pi} = 2\pi r.$$

Graf funkce $f(x)$ můžeme chápat jako množinu bodů $[x, f(x)]$, tedy je to speciální případ křivky v rovině, která má parametrizaci $[t, f(t)]$ pro $t \in [a, b]$ (v tomto případě tuto parametrizaci ale píšeme s proměnnou x). A protože má tato parametrizace derivaci $[(t)', f'(t)] = [1, f'(t)]$, dostáváme

Důsledek

Má-li funkce $f(x)$ spojitou derivaci na intervalu $[a, b]$, potom má její graf na intervalu $[a, b]$ konečnou délku a platí

$$d(f) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Objem rotačního tělesa

Rotační těleso vznikne rotací plochy mezi grafem funkce $f(x)$ a osou x *kolem osy* x na intervalu $[a, b]$ (viz obr.). Zřejmě má tato úloha smysl pouze pro nezápornou funkci $f(x)$ (či obecněji, pro funkci, která nemění znaménko na intervalu $[a, b]$, tj. je buď stále nezáporná nebo nekladná).

Objem rotačního tělesa

Rotační těleso vznikne rotací plochy mezi grafem funkce $f(x)$ a osou x *kolem osy* x na intervalu $[a, b]$ (viz obr.). Zřejmě má tato úloha smysl pouze pro nezápornou funkci $f(x)$ (či obecněji, pro funkci, která nemění znaménko na intervalu $[a, b]$, tj. je buď stále nezáporná nebo nekladná).

Věta (objem rotačního tělesa)

Nechť $f(x)$ je spojitá nezáporná funkce na intervalu $[a, b]$. Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací plochy mezi grafem f a osou x na intervalu $[a, b]$ kolem osy x, je

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Objem rotačního tělesa

Rotační těleso vznikne rotací plochy mezi grafem funkce $f(x)$ a osou x *kolem osy* x na intervalu $[a, b]$ (viz obr.). Zřejmě má tato úloha smysl pouze pro nezápornou funkci $f(x)$ (či obecněji, pro funkci, která nemění znaménko na intervalu $[a, b]$, tj. je buď stále nezáporná nebo nekladná).

Věta (objem rotačního tělesa)

Nechť $f(x)$ je spojitá nezáporná funkce na intervalu $[a, b]$. Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací plochy mezi grafem f a osou x na intervalu $[a, b]$ kolem osy x, je

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Intuitivní zdůvodnění je obdobné jako u délky křivky – objem *nekonečně malé válcové části tělesa* o délce dx je dán součinem dx a obsahu *kruhové podstavy o obsahu* $\pi f(x)^2$.

Povrch rotačního tělesa

Analogicky jako objem vypočteme i povrch pláště rotačního tělesa. Pokud vznikne těleso rotací grafu funkce f kolem osy x v intervalu $[a, b]$, vzniká při přírůstku Δx nárůst plochy, jehož velikost je rovna součinu Δs délky křivky zadané grafem funkce f a velikosti kružnice o poloměru $f(x)$. Plocha se proto spočte formulí

$$S(f) = 2\pi \int_a^b f(x)\, ds = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

kde $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ je dán přírůstkem délky křivky $y = f(x)$.

Povrch rotačního tělesa

Analogicky jako objem vypočteme i povrch pláště rotačního tělesa. Pokud vznikne těleso rotací grafu funkce f kolem osy x v intervalu $[a, b]$, vzniká při přírůstku Δx nárůst plochy, jehož velikost je rovna součinu Δs délky křivky zadané grafem funkce f a velikosti kružnice o poloměru $f(x)$. Plocha se proto spočte formulí

$$S(f) = 2\pi \int_a^b f(x)\, ds = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

kde $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ je dán přírůstkem délky křivky $y = f(x)$.

Věta (obsah pláště rotačního tělesa)

Nechť $f(x)$ je nezáporná funkce se spojitou derivací $f'(x)$ na intervalu $[a, b]$. Obsah pláště rotačního tělesa, které vznikne grafu f na intervalu $[a, b]$ kolem osy x, je

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\, \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Příklad

Určete povrch jednotkové koule.

Příklad

Určete povrch jednotkové koule.

Řešení

Povrch určíme jako dvojnásobek povrchu polokoule, přičemž polokoule vznikne rotací funkce $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ kolem osy x na intervalu $[0, 1]$. Protože platí $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$, je tedy

$$
\begin{aligned}
S &= 2\,.\,2\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,\sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\,dx = \\
&= 4\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,\sqrt{\frac{(r^2 - x^2) + x^2}{r^2 - x^2}}\,dx \\
&= 4\pi \int_0^r r\,dx = 4\pi \left[\,rx\,\right]_0^r = 4\pi r^2.
\end{aligned}
$$

Plán přednášky

Stejně jako je $\int_a^b f$ plocha mezi grafem (ohraničené) funkce $f(x)$ a osou x na (konečném) intervalu $[a, b]$, můžeme chtít najít tuto plochu na *neohraničeném* intervalu $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, \infty)$, případně i pro *neohraničenou* funkci $f(x)$. Dostáváme se tak k pojmu *nevlastního integrálu*

$$\int_a^\infty f, \qquad \int_{-\infty}^b f, \qquad \int_{-\infty}^\infty f.$$

Přitom, jak uvidíme, všechna pravidla pro výpočet integrálu zůstávají zachována, jen je potřeba dávat pozor na neurčité výrazy (obsahující symbol ∞) a ty pak spočítat pomocí limity.

Příklad

- Plocha pod ohraničenou funkcí $f(x) = \frac{1}{x^2}$ na intervalu $[1, \infty)$ je

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} = -\frac{1}{\infty} - (-1) = 0 + 1 = 1.$$

Příklad

- Plocha pod ohraničenou funkcí $f(x) = \frac{1}{x^2}$ na intervalu $[1, \infty)$ je

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = -\frac{1}{\infty} - (-1) = 0 + 1 = 1.$$

- Plocha pod neohraničenou funkcí $f(x) = \frac{1}{x^2}$ na intervalu $(0, 1]$ je

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_0^1 = (-1) - \left(-\frac{1}{0^+}\right) = -1 + \infty = \infty.$$

Příklad

- Plocha pod ohraničenou funkcí $f(x) = \frac{1}{x^2}$ na intervalu $[1, \infty)$ je

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} = -\frac{1}{\infty} - (-1) = 0 + 1 = 1.$$

- Plocha pod neohraničenou funkcí $f(x) = \frac{1}{x^2}$ na intervalu $(0, 1]$ je

$$\int_0^{1} \frac{1}{x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_0^{1} = (-1) - \left(-\frac{1}{0^+}\right) = -1 + \infty = \infty.$$

- Plocha pod ohraničenou funkcí $f(x) = \frac{1}{x}$ na intervalu $[1, \infty)$ je

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \left[\ln x\right]_1^{\infty} = \ln\infty - \ln 1 = \infty - 0 = \infty.$$

Definice (Nevlastní integrál 1. druhu – nekonečný integrál)

Nechť je funkce $f(x)$ definována na intervalu $[a, \infty)$. Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx = L,$$

potom říkáme, že *nevlastní integrál* $\int_a^\infty f(x)\, dx$ *konverguje* a klademe

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = L.$$

Definice (Nevlastní integrál 1. druhu – nekonečný integrál)

Nechť je funkce $f(x)$ definována na intervalu $[a, \infty)$. Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx = L,$$

potom říkáme, že *nevlastní integrál* $\int_a^\infty f(x)\, dx$ *konverguje* a klademe

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = L.$$

Podobně hovoříme o *divergenci* integrálu.

Definice (Nevlastní integrál 1. druhu – nekonečný integrál)

Nechť je funkce $f(x)$ definována na intervalu $[a, \infty)$. Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx = L,$$

potom říkáme, že *nevlastní integrál* $\int_a^\infty f(x)\, dx$ *konverguje* a klademe

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = L.$$

Podobně hovoříme o *divergenci* integrálu.
Obdobně pro interval $[-\infty, b]$.

Příklad

Vypočtěte nevlastní integrál pro jeden z typů parciálních zlomků

$$\int_0^\infty \frac{x}{(x^2+a^2)^2}\,dx, \qquad a \neq 0.$$

Příklad

Vypočtěte nevlastní integrál pro jeden z typů parciálních zlomků

$$\int_0^\infty \frac{x}{(x^2+a^2)^2}\,dx, \qquad a \neq 0.$$

Řešení

Pomocí substituce dostaneme

$$\int_0^\infty \frac{x}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x^2 = t \\ 2x\,dx = dt \\ x = 0 \;\Rightarrow t = 0 \\ x = \infty \;\Rightarrow\; t = \infty \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{(t+a^2)^2}\,dt = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{t+a^2}\right]_0^\infty =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(-\underbrace{\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t+a^2}}_{=0}\right) - \left(-\frac{1}{a^2}\right)\right\} = \frac{1}{2a^2}.$$

Někdy lze podobným způsobem s využitím pravidla návaznosti vypočítat i nevlastní integrál přes (oboustranně) nekonečný interval $(-\infty, \infty)$, Někdy lze podobným způsobem s využitím pravidla návaznosti vypočítat i nevlastní integrál přes (oboustranně) nekonečný interval $(-\infty, \infty)$,

Příklad

V pravděpodobnosti a statistice se často používá nevlastní integrál

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = 1,$$

přičemž funkce

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

se nazývá hustota pravděpodobnosti (standardního) normálního rozdělení. Protože je tato funkce $f(x)$ sudá, zřejmě je pak

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \approx 1.2533.$$

Obdobně jako v případě nekonečného integrálu lze postupovat i v případě funkce, která je v okolí bodu a nebo b neohraničená.

Obdobně jako v případě nekonečného integrálu lze postupovat i v případě funkce, která je v okolí bodu a nebo b neohraničená.

Definice (Nevlastní integrál 2. druhu)

Nechť je neohraničená funkce $f(x)$ definována na intervalu $(a, b]$. Existuje-li vlastní (pravostranná) limita

$$\lim_{\alpha \to a^+} \int_\alpha^b f(x)\, dx = L,$$

říkáme, že *nevlastní integrál* $\int_a^b f(x)\, dx$ *konverguje* a klademe

$$\int_a^b f(x)\, dx = L.$$

Obdobně jako v případě nekonečného integrálu lze postupovat i v případě funkce, která je v okolí bodu a nebo b neohraničená.

Definice (Nevlastní integrál 2. druhu)

Nechť je neohraničená funkce $f(x)$ definována na intervalu $(a, b]$. Existuje-li vlastní (pravostranná) limita

$$\lim_{\alpha \to a^+} \int_\alpha^b f(x)\, dx = L,$$

říkáme, že *nevlastní integrál* $\int_a^b f(x)\, dx$ *konverguje* a klademe

$$\int_a^b f(x)\, dx = L.$$

Pokud je tato limita nevlastní, říkáme, že integrál diverguje.

Obdobně jako v případě nekonečného integrálu lze postupovat i v případě funkce, která je v okolí bodu a nebo b neohraničená.

Definice (Nevlastní integrál 2. druhu)

Nechť je neohraničená funkce $f(x)$ definována na intervalu $(a, b]$. Existuje-li vlastní (pravostranná) limita

$$\lim_{\alpha \to a^+} \int_\alpha^b f(x)\,dx = L,$$

říkáme, že *nevlastní integrál* $\int_a^b f(x)\,dx$ *konverguje* a klademe

$$\int_a^b f(x)\,dx = L.$$

Pokud je tato limita nevlastní, říkáme, že integrál diverguje. Podobně i v případě funkce definované na intervalu $[a, b)$ a definice nevlastního integrálu $\int_a^b f(x)\,dx$ pomocí (levostranné) limity $\lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f(x)\,dx$.

Příklad

Určete plochu pod grafem funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ na intervalu $(-1, 1)$.

Příklad

Určete plochu pod grafem funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ na intervalu $(-1, 1)$.

Řešení

Funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ je na intervalu $(-1, 1)$ neohraničená a sudá. Plochu vypočítáme jako dvojnásobek plochy na intervalu $[0, 1)$.

$$P = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\left[\arcsin x\right]_0^1 = 2\left(\left(\lim_{x\to 1^-} \arcsin x\right) - \arcsin 0\right)$$
$$= 2\left(\arcsin 1 - \arcsin 0\right) = 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi.$$

Příklad

Určete plochu pod grafem funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ na intervalu $(-1, 1)$.

Řešení

Funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ je na intervalu $(-1, 1)$ neohraničená a sudá. Plochu vypočítáme jako dvojnásobek plochy na intervalu $[0, 1)$.

$$P = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\left[\arcsin x\right]_0^1 = 2\left(\left(\lim_{x\to 1^-} \arcsin x\right) - \arcsin 0\right)$$
$$= 2\left(\arcsin 1 - \arcsin 0\right) = 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi.$$

V tomto případě limita ani není potřeba, protože primitivní funkce $F(x) = \arcsin x$ k funkci $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ je spojitá zleva v $x = 1$ a tedy $P = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left[\arcsin x\right]_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$.

Plán přednášky

Numerická integrace (kvadratura)

Numerická integrace nachází uplatnění zejména v následujících případech:

- integrovanou funkci neznáme přímo, známe jen její hodnoty v některých bodech (např. z měření)

Numerická integrace (kvadratura)

Numerická integrace nachází uplatnění zejména v následujících případech:

- integrovanou funkci neznáme přímo, známe jen její hodnoty v některých bodech (např. z měření)
- integrovaná funkce je známá, ale její primitivní funkci (antiderivaci) je obtížné (či dokonce nemožné) vyjádřit jakožto *elementární funkci*.

Numerická kvadratura

Přímo z definice Riemannova integrálu – snaha odhadnout plochu pod křivkou, objem *pod plochou* apod.

Numerická kvadratura

Přímo z definice Riemannova integrálu – snaha odhadnout plochu pod křivkou, objem *pod plochou* apod.

Newton-Cotesovy vzorce

Interval $[a, b]$, nad kterým integrujeme, rozdělíme na n **stejných** částí (délky h) tak, že v krajních bodech těchto částí známe hodnotu integrované funkce. Podle toho, jestli uvažujeme i hodnoty v krajních bodech a a b intervalu, rozlišujeme Newton-Cotesovy formule na *uzavřené* a *otevřené*.

Pak

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i),$$

w_i jsou váhy (uzavřený tvar).

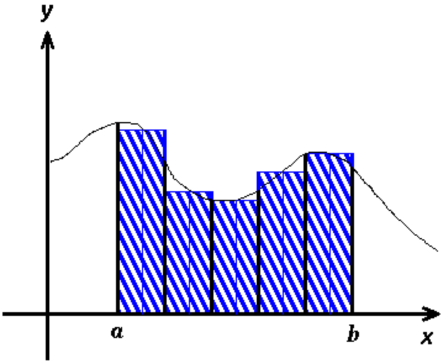
Váhy snadno odvodíme např. pomocí Lagrangeovy interpolace.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b L(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \underbrace{\int_a^b \ell_i(x)\,dx}_{w_i}.$$

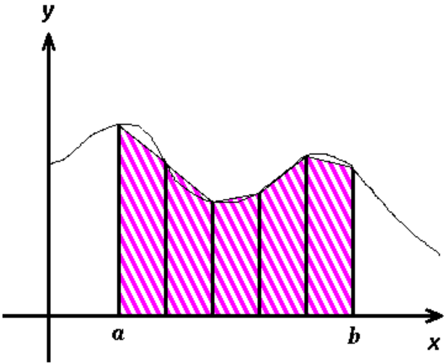
obdélníkové pravidlo (otevřená Newton-Cotesova formule) – interpolace konstatní funkcí

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$



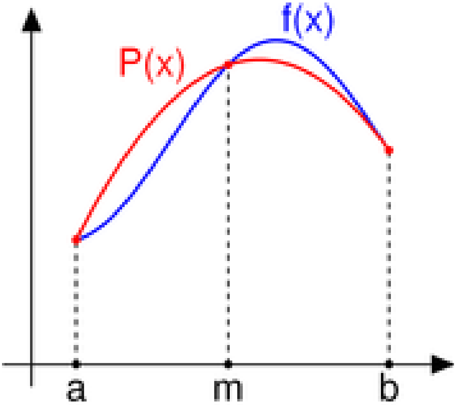
lichoběžníkové pravidlo (uzavřená Newton-Cotesova formule) – interpolace lineární funkcí

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$



Simpsonovo pravidlo (uzavřená Newton-Cotesova formule) – interpolace kvadratickou funkcí

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right].$$



Příklad

Pomocí lichoběžníkového, resp. Simpsonova pravidla vypočtěte

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx.$$

Příklad

Pomocí lichoběžníkového, resp. Simpsonova pravidla vypočtěte

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx.$$

Řešení

- lichoběžníkové pravidlo: $I \approx \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \approx 0.785$

Příklad

Pomocí lichoběžníkového, resp. Simpsonova pravidla vypočtěte

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx.$$

Řešení

- lichoběžníkové pravidlo: $I \approx \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \approx 0.785$
- Simpsonovo pravidlo: $I \approx \frac{\pi}{12} \left(0 + 4\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) \approx 1.003.$