Matematika II – 9. přednáška
Nekonečné řady

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

23. 11. 2011

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB102`, *e*-text.

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB102`, *e*-text.
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka – **Nekonečné řady s programem Maple**, CD, *e*-text a videozáznamy, `http://www.math.muni.cz/~plch/nkpm`.

Plán přednášky

V této kapitole se budeme věnovat součtům *nekonečně mnoha* sčítanců – buď čísel nebo mocnin. Jako motivace nám může sloužit *geometrická řada*, kterou jistě znáte ze střední školy, případně Taylorův polynom funkce $f(x)$ pro libovolně velká n. To následně vede k vyjádření (tedy i obráceně, k možné definici) všech elementárních funkcí pomocí polynomů „nekonečného stupně“, tedy pomocí nekonečných mocninných řad.

V této kapitole se budeme věnovat součtům *nekonečně mnoha* sčítanců – buď čísel nebo mocnin. Jako motivace nám může sloužit *geometrická řada*, kterou jistě znáte ze střední školy, případně Taylorův polynom funkce $f(x)$ pro libovolně velká n. To následně vede k vyjádření (tedy i obráceně, k možné definici) všech elementárních funkcí pomocí polynomů „nekonečného stupně“, tedy pomocí nekonečných mocninných řad.
Budeme pracovat s posloupností reálných čísel

$$\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}.$$

Definice (Nekonečná řada)

Součet tvaru $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nazýváme *nekonečnou (číselnou) řadou*. Číslo a_n se nazývá *n–tý člen*.
Číslo $s_n := a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$ se nazývá *n–tý částečný součet* této nekonečné řady.

Geometrická řada

Geometrická řada je součet tvaru

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n,$$

kde $a, q \in \mathbb{R}$ jsou pevně zvolená čísla, je to tedy nekonečná řada pro $a_n := aq^n$. Číslo q se nazývá *kvocient* geometrické řady, přičemž q může být kladné i záporné.

Geometrická řada

Geometrická řada je součet tvaru

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n,$$

kde $a, q \in \mathbb{R}$ jsou pevně zvolená čísla, je to tedy nekonečná řada pro $a_n := aq^n$. Číslo q se nazývá *kvocient* geometrické řady, přičemž q může být kladné i záporné. Posloupnost částečných součtů geometrické řady je

$$\begin{aligned} s_n &= a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + aq^n, \\ \text{odkud} \quad q \cdot s_n &= \phantom{a+{}} aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + aq^n + aq^{n+1} \end{aligned}$$

a odečtením dostaneme $s_n(1-q) = a(1-q^{n+1})$.
Pro $q = 1$ je zřejmě $s_n = (n+1)a$, je-li $q \neq 1$, potom je

$$s_n = a\,\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Součet nekonečné řady

Definice

Existuje-li vlastní limita $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, potom říkáme, že nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konverguje* k číslu s, nebo také že *má součet* s, a píšeme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s.$$

Součet nekonečné řady

Definice

Existuje-li vlastní limita $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, potom říkáme, že nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konverguje* k číslu s, nebo také že *má součet* s, a píšeme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s.$$

Existuje-li nevlastní limita $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$, potom říkáme, že nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *diverguje* k $\pm\infty$ a píšeme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \pm\infty.$$

Součet nekonečné řady

Definice

Existuje-li vlastní limita $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, potom říkáme, že nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konverguje* k číslu s, nebo také že *má součet* s, a píšeme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s.$$

Existuje-li nevlastní limita $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$, potom říkáme, že nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *diverguje* k $\pm\infty$ a píšeme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \pm\infty.$$

Pokud limita $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje, potom říkáme, že nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *osciluje*.

Věta (Konvergence a divergence geometrické řady)

Geometrická řada $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ *konverguje pro* $a \neq 0$, *právě když* $|q| < 1$. *V případě konvergence je pak její součet*

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}.$$

Věta (Konvergence a divergence geometrické řady)

Geometrická řada $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ *konverguje pro* $a \neq 0$, *právě když* $|q| < 1$. *V případě konvergence je pak její součet*

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}.$$

Důkaz.

Zřejmý z toho, že

$$s_n = a\,\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Posloupnost $\left\{q^{n+1}\right\}_{n=0}^{\infty}$ konverguje k 0, právě když je $|q| < 1$, k ∞ pro $q \geq 1$ a nemá limitu pro $q \leq -1$. Odtud pro $|q| < 1$ dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}.$$

$\square$

Jestliže má daná nekonečná řada konvergovat, musí se zřejmě její členy postupně *zmenšovat* (v absolutní hodnotě) k nule, jinak by posloupnost částečných součtů nemohla konvergovat ke konečnému číslu. Platí tedy následující.

Věta (nutná podmínka konvergence)

Jestliže nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konverguje, potom nutně platí*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Jestliže má daná nekonečná řada konvergovat, musí se zřejmě její členy postupně *zmenšovat* (v absolutní hodnotě) k nule, jinak by posloupnost částečných součtů nemohla konvergovat ke konečnému číslu. Platí tedy následující.

Věta (nutná podmínka konvergence)

Jestliže nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje, potom nutně platí

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Důkaz.

Konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ implikuje $\lim s_n = s \in \mathbb{R}$ a protože $a_n = s_n - s_{n+1}$, zřejmě $\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = s - s = 0$. $\square$

Harmonická řada

Předchozí podmínka je skutečně pouze podmínkou nutnou:

Příklad

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ se nazývá harmonická (každý její člen je *harmonickým průměrem* dvou sousedních členů (tj. $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2}(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}})$).

Harmonická řada

Předchozí podmínka je skutečně pouze podmínkou nutnou:

Příklad

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ se nazývá harmonická (každý její člen je *harmonickým průměrem* dvou sousedních členů (tj. $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}\right)$). Zřejmě je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, přitom ale řada diverguje, neboť

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 1 + \frac{1}{2}, \quad s_4 > s_2 + 2\cdot\frac{1}{4} = 1 + 2\cdot\frac{1}{2}$$

$$s_8 > s_4 + 4\cdot\frac{1}{8} = 1 + 3\cdot\frac{1}{2}, \quad s_{16} > s_8 + 8\cdot\frac{1}{16} = 1 + 4\cdot\frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

$$s_n > 1 + n\cdot\frac{1}{2},$$

odkud je snadno vidět, že $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje.

Pravidla pro nekonečné řady

Přímo z definice díky obdobným vlastnostem limit plyne následující.

Věta

Nechť nekonečné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *konvergují a nechť platí* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A, \sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$. *Pak platí:*

Pravidla pro nekonečné řady

Přímo z definice díky obdobným vlastnostem limit plyne následující.

Věta

Nechť nekonečné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *konvergují a nechť platí* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A, \sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$. *Pak platí:*

1. *pravidlo konstantního násobku: pro libovolné* $c \in \mathbb{R}$ *nekonečná řada* $\sum_{n=0}^{\infty} c \cdot a_n$ *konverguje a platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c \cdot a_n = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n = c \cdot A.$$

Pravidla pro nekonečné řady

Přímo z definice díky obdobným vlastnostem limit plyne následující.

Věta

Nechť nekonečné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *konvergují a nechť platí* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$. *Pak platí:*

1. *pravidlo konstantního násobku: pro libovolné* $c \in \mathbb{R}$ *nekonečná řada* $\sum_{n=0}^{\infty} c \cdot a_n$ *konverguje a platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c \cdot a_n = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n = c \cdot A.$$

2. *Pravidlo součtu a rozdílu: nekonečná řada* $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ *konverguje a platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n = A \pm B.$$

Předchozí věta nic neříká o součinu (a podílu) nekonečných řad. Tato problematika je mnohem složitější, než se na první pohled zdá, a kolem součinu řad existuje celá teorie (protože existují různé součiny nekonečných řad). Uvědomte si totiž, že při násobení mnohočlenů platí

$$
\begin{aligned}
&(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) \cdot (b_0 + b_1 + \cdots + b_n) \\
&= a_0 b_0 + a_0 b_1 + \cdots + a_0 b_n + a_1 b_0 + a_1 b_1 + \cdots + a_1 b_n + \cdots + a_n b_n,
\end{aligned}
$$

tedy dostáváme nejen „diagonální součiny“ $a_i b_i$, ale také všechny „smíšené součiny“ $a_i b_j$. A pro součin takovýchto nekonečných mnohočlenů (tedy pro součin nekonečných řad) bude situace ještě mnohem složitější, protože bude záležet na tom, jakým způsobem výsledný součet jednotlivých součinů uspořádáme (viz později uvedené příklady).

Plán přednášky

Nekonečné řady s nezápornými členy

Pro nekonečné řady s nezápornými členy existuje několik kritérií pro určení jejich konvergence/divergence. Všechna kritéria jsou založena na faktu, že pro řadu s *nezápornými* členy je její posloupnost částečných součtů *neklesající*.

Nekonečné řady s nezápornými členy

Pro nekonečné řady s nezápornými členy existuje několik kritérií pro určení jejich konvergence/divergence. Všechna kritéria jsou založena na faktu, že pro řadu s *nezápornými* členy je její posloupnost částečných součtů *neklesající*.
A pokud je tedy neklesající posloupnost $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ shora ohraničená, musí mít limitu (rovnu svému supremu). Tedy každá nekonečná řada s nezápornými členy buď *konverguje* nebo *diverguje k* ∞ (tj. nemůže divergovat k $-\infty$ ani oscilovat).

Nekonečné řady s nezápornými členy

Pro nekonečné řady s nezápornými členy existuje několik kritérií pro určení jejich konvergence/divergence. Všechna kritéria jsou založena na faktu, že pro řadu s *nezápornými* členy je její posloupnost částečných součtů *neklesající*.
A pokud je tedy neklesající posloupnost $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ shora ohraničená, musí mít limitu (rovnu svému supremu). Tedy každá nekonečná řada s nezápornými členy buď *konverguje* nebo *diverguje k* ∞ (tj. nemůže divergovat k $-\infty$ ani oscilovat).

Věta (srovnávací kritérium)

Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *a* $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ *jsou posloupnosti nezáporných čísel, pro které platí* $0 \le a_n \le b_n$ *pro všechna* n *od jistého* n_0

1. *Jestliže* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *konverguje, potom také konverguje řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.
2. *Jestliže* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *diverguje k* ∞, *potom také řada* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *diverguje k* ∞.

Pro použití srovnávacího kritéria je zřejmě potřeba mít „v zásobě“ nějaký soubor nekonečných řad, o kterých víme, že jsou konvergentní/divergentní.

Příklad

Nekonečná řada $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ *konverguje* podle srovnávacího kritéria, protože všechny její členy lze shora omezit příslušnými členy konvergentní řady

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Pro součet uvedené řady pak zřejmě platí odhad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} < 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3.$$

Příklad

Nekonečná řada

$$\frac{\ln 1}{1} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

diverguje k ∞ podle srovnávacího kritéria, protože její členy lze zdola omezit příslušnými členy (divergentní) harmonické řady, tj. platí

$$\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n} \qquad \text{pro všechna } n \geq 2.$$

Příklad

Nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *konverguje* podle srovnávacího kritéria, protože pro $n \geq 2$ platí $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$ a řada

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

konverguje, neboť jde o *teleskopickou* řadu, jejíž částečné součty mají tvar

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

a tedy $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$.

Příklad

Nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *konverguje* podle srovnávacího kritéria, protože pro $n \geq 2$ platí $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$ a řada

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

konverguje, neboť jde o *teleskopickou* řadu, jejíž částečné součty mají tvar

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

a tedy $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$.
Součet řady je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je tedy shora omezen číslem 2.

Příklad

Nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *konverguje* podle srovnávacího kritéria, protože pro $n \geq 2$ platí $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$ a řada

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

konverguje, neboť jde o *teleskopickou* řadu, jejíž částečné součty mají tvar

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

a tedy $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$.
Součet řady je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je tedy shora omezen číslem 2.
Vyčíslení této řady je z historie známo jako basilejský problém, který vyřešil v roce 1735 Leonhard Euler (důkaz viz `wikipedia` nebo si počkejte na Taylorovy a Fourierovy řady).

Kritéria konvergence

Věta (integrální kritérium)

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *je nekonečná řada s nezápornými členy. Nechť* $f(x)$ *je funkce definovaná na intervalu* $[N, \infty)$ *pro nějaké* $N \in [0, \infty)$, *která je na tomto intervalu nezáporná, nerostoucí a platí*

$$f(n) = a_n \qquad \text{pro všechna } n \geq N.$$

Potom

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{konverguje} \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_N^{\infty} f(x)\, dx \quad \text{konverguje},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{diverguje k } \infty \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_N^{\infty} f(x)\, dx = \infty.$$

Příklad

Harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *diverguje k* ∞ podle integrálního kritéria, protože funkce $f(x) := \frac{1}{x}$ je na intervalu $[1, \infty)$ kladná, klesající a platí $f(n) = \frac{1}{n}$ pro $n \geq 1$, přičemž je nevlastní integrál

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \infty.$$

Příklad

Určete, pro které mocniny $p \in \mathbb{R}$ nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konverguje či diverguje.

Příklad

Určete, pro které mocniny $p \in \mathbb{R}$ nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konverguje či diverguje.

Řešení

Pro $p < 0$ jde o řadu $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$, která má nezáporné **rostoucí** členy, proto diverguje k ∞. Rovněž v případech $p = 0, 1$ řada zřejmě diverguje.

Příklad

Určete, pro které mocniny $p \in \mathbb{R}$ nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konverguje či diverguje.

Řešení

Pro $p < 0$ jde o řadu $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$, která má nezáporné **rostoucí** členy, proto diverguje k ∞. Rovněž v případech $p = 0, 1$ řada zřejmě diverguje.

Pro $p > 0, p \neq 1$ je funkce $f(x) = \frac{1}{x^p}$ na intervalu $[1, \infty)$ kladná, klesající a platí $f(n) = \frac{1}{n^p}$ pro $n \geq 1$. Vyšetříme konvergenci nevlastního integrálu $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$. Máme

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^{\infty} = \left(\lim_{x\to\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} \right) - \frac{1}{1-p}.$$

Příklad

Určete, pro které mocniny $p \in \mathbb{R}$ nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konverguje či diverguje.

Řešení

Pro $p < 0$ jde o řadu $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$, která má nezáporné **rostoucí** členy, proto diverguje k ∞. Rovněž v případech $p = 0, 1$ řada zřejmě diverguje.

Pro $p > 0, p \neq 1$ je funkce $f(x) = \frac{1}{x^p}$ na intervalu $[1, \infty)$ kladná, klesající a platí $f(n) = \frac{1}{n^p}$ pro $n \geq 1$. Vyšetříme konvergenci nevlastního integrálu $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$. Máme

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^{\infty} = \left(\lim_{x\to\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} \right) - \frac{1}{1-p}.$$

Odtud snadno plyne konvergence pro $p > 1$ a divergence pro $p \in (0, 1)$.

Věta (limitní podílové kritérium)

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je nekonečná řada s kladnými členy a předpokládejme, že existuje (vlastní nebo nevlastní) limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Věta (limitní podílové kritérium)

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *je nekonečná řada s kladnými členy a předpokládejme, že existuje (vlastní nebo nevlastní) limita*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Potom

1. *tato řada konverguje, pokud je* $q < 1$,
2. *tato řada diverguje k* ∞, *pokud je* $q > 1$ *nebo* $q = \infty$,
3. *tento test nedává odpověď , pokud je* $q = 1$.

Příklad

Pro nekonečnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{1} + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \frac{4!}{4^4} + \dots$$

platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot n!} = \frac{(n+1) \cdot n! \cdot n^n}{(n+1)^n \cdot (n+1) \cdot n!} =$$

$$= \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1,$$

přičemž ve výpočtu jsme použili limitu definující Eulerovo číslo e. Uvedená řada tedy *konverguje* podle podílového kritéria.

Věta (odmocninové kritérium)

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *je nekonečná řada s nezápornými členy pro všechna* $n \geq N$ *pro nějaké* $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *a předpokládejme, že existuje (vlastní nebo nevlastní) limita* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$.

Věta (odmocninové kritérium)

Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *je nekonečná řada s nezápornými členy pro všechna* $n \geq N$ *pro nějaké* $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *a předpokládejme, že existuje (vlastní nebo nevlastní) limita* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$*.*
Potom

1. *tato řada konverguje, pokud je* $q < 1$*,*
2. *tato řada diverguje k* ∞*, pokud je* $q > 1$ *nebo* $q = \infty$*,*
3. *tento test nedává odpověď, pokud je* $q = 1$*.*

Příklad

Pro nekonečnou řadu
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{7}{2^7} + \dots$, tj.

$$a_n = \begin{cases} \frac{n}{2^n}, & \text{pro } n \text{ liché,} \\ \frac{1}{2^n}, & \text{pro } n \text{ sudé,} \end{cases}$$

s podílovým kritériem neuspějeme,

Příklad

Pro nekonečnou řadu
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{7}{2^7} + \dots$, tj.

$$a_n = \begin{cases} \frac{n}{2^n}, & \text{pro } n \text{ liché}, \\ \frac{1}{2^n}, & \text{pro } n \text{ sudé}, \end{cases}$$

s podílovým kritériem neuspějeme, zatímco odmocninové kritérium použít lze, neboť

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2}, & \text{pro } n \text{ liché}, \\ \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}, & \text{pro } n \text{ sudé}. \end{cases}$$

Platí tedy nerovnosti $\frac{1}{2} \le \sqrt[n]{a_n} \le \frac{\sqrt[n]{n}}{2}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.
Limita výrazu na pravé straně se spočte přes exponenciální funkci a l'Hospitalovo pravidlo: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} =$
$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln n} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1}} = e^0 = 1.$

Příklad

Všimněte si, že podílové ani odmocninové kritérium nelze použít pro vyšetření konvergence/divergence nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, protože pro podílové kritérium je

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p =$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\right)^p = 1^p = 1,$$

Příklad

Všimněte si, že podílové ani odmocninové kritérium nelze použít pro vyšetření konvergence/divergence nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, protože pro podílové kritérium je

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p =$$
$$= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\right)^p = 1^p = 1,$$

a pro odmocninové kritérium je

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^p}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^p =$$
$$= \left(\frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}\right)^p = \frac{1}{1^p} = 1.$$

Zde jsme opět použili limitu $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Plán přednášky

Alternující řady

Uveďme ještě kritérium konvergence pro nekonečné řady, jejichž členy mění znaménka.

Definice

Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost *nezáporných* čísel. Potom se nekonečná řada $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$, případně $-a_0 + a_1 - a_2 + a_3 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, nazývá *alternující řada*.

Alternující řady

Uveďme ještě kritérium konvergence pro nekonečné řady, jejichž členy mění znaménka.

Definice

Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost *nezáporných* čísel. Potom se nekonečná řada $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$, případně $-a_0 + a_1 - a_2 + a_3 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, nazývá *alternující řada*.

Pro alternující řady se nutná podmínka pro konvergenci stává i podmínkou postačující.

Věta (Leibnitzovo kritérium)

Jestliže je $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ nerostoucí posloupnost kladných čísel, potom nekonečná alternující řada $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ konverguje, právě když platí $\lim_{n\to\infty} (-1)^n a_n = 0$.

Odhad chyby alternující řady

Věta

Předpokládejme, že alternující řada $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ (konvergující k číslu A) splňuje podmínky Leibnitzova kritéria. Potom pro všechna $n \geq N$ platí, že n–tý částečný součet

$$s_n := a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^n a_n$$

splňuje

$$|A - s_n| < a_{n+1}.$$

Navíc, zbytek $A - s_n$ má stejné znaménko jako tento první (do s_n) nezahrnutý člen $(-1)^{n+1} a_{n+1}$.

Příklad

Ilustrujme předchozí tvrzení na alternující řadě

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots-\underbrace{\frac{1}{128}}_{a_7}\quad\Big|\quad+\underbrace{\frac{1}{256}}_{a_8}-\ldots,$$

jejíž součet známe. Protože se jedná o geometrickou řadu s $a=1$ a $q=-\frac{1}{2}$, je součet této řady roven číslu

$$A=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\approx 0.6666667.$$

Příklad

Ilustrujme předchozí tvrzení na alternující řadě

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots-\underbrace{\frac{1}{128}}_{a_7}\quad\Big|\quad+\underbrace{\frac{1}{256}}_{a_8}-\ldots,$$

jejíž součet známe. Protože se jedná o geometrickou řadu s $a=1$ a $q=-\frac{1}{2}$, je součet této řady roven číslu

$$A=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\approx 0.6666667.$$

Potom věta říká, že pokud tuto řadu „ukončíme" po osmém členu (tj. $n=7$), potom konečný součet

$$s_7:=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\frac{1}{64}-\frac{1}{128}=\frac{85}{128}=0.6640625$$

aproximuje číslo A s chybou menší než je $a_8=\frac{1}{256}=0.00390625$.

Příklad (dokončení)

Skutečně,

$$|A - s_7| = \left| \frac{2}{3} - \frac{85}{128} \right| = \left| \frac{1}{384} \right| \approx 0.00260417 < 0.00390625 = a_8.$$

Přitom má rozdíl $A - s_7 = \frac{1}{384}$ stejné znaménko jako člen $(-1)^8\, a_8 = \frac{1}{256}$, tedy je kladný.

Plán přednášky

Řady absolutně a relativně konvergentní

Nejprve si všimněme, že *pokud* konverguje řada absolutních hodnot, potom konverguje původní řada.

Věta

Jestliže konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, *potom konverguje také řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Řady absolutně a relativně konvergentní

Nejprve si všimněme, že *pokud* konverguje řada absolutních hodnot, potom konverguje původní řada.

Věta

Jestliže konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, *potom konverguje také řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Důkaz.

Zřejmě pro každé n platí nerovnosti $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|, \Rightarrow 0 \leq a_n + |a_n| \leq 2\,|a_n|$. Tedy pokud $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konverguje, konverguje také řada $\sum_{n=0}^{\infty} 2\,|a_n|$ (podle pravidla konstantního násobku). A dále, podle srovnávacího kritéria, konverguje také řada $\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n + |a_n|\right)$. A protože platí rovnost $a_n = \left(a_n + |a_n|\right) - |a_n|$, máme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n + |a_n|\right) - \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, odkud dostáváme řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jako rozdíl dvou konvergentních řad. Tedy tato řada také konverguje podle pravidla rozdílu. $\square$

Poznámka

Opačná implikace ve větě zřejmě *neplatí*, protože např. alternující harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ konverguje, ale příslušná řada absolutních hodnot je harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, která diverguje k ∞.

Poznámka

Opačná implikace ve větě zřejmě *neplatí*, protože např. alternující harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ konverguje, ale příslušná řada absolutních hodnot je harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, která diverguje k ∞.

Definice

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně* (je *absolutně konvergentní*), pokud konverguje příslušná řada absolutních hodnot, tj. pokud konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$.
Jestliže nekonečná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje, ale nekonverguje absolutně, potom říkáme, že tato řada *konverguje relativně* (je *relativně konvergentní*).

Příklad

1. Alternující harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ konverguje relativně.

Příklad

1. Alternující harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ konverguje relativně.
2. Nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$ konverguje absolutně, protože příslušná řada absolutních hodnot $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje.

Příklad

1. Alternující harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ konverguje relativně.
2. Nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ konverguje absolutně, protože příslušná řada absolutních hodnot $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konverguje.

Příklad

1. Alternující harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ konverguje relativně.
2. Nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$ konverguje absolutně, protože příslušná řada absolutních hodnot $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje.

Rozdíl mezi absolutně a relativně konvergentní řadou je zejména v tom, že členy *absolutně* konvergentní řady můžeme *libovolně* přeskládávat a nejenže dostaneme opět konvergentní řadu, ale tato nová přeskládaná řada bude mít *stejný součet* jako řada původní. Naproti tomu členy *relativně* konvergentní řady *nelze* přeskládávat vůbec. Lze totiž jednoduše ukázat, že různým přeskládáním téže relativně konvergentní řady lze vytvořit řadu divergující k $\pm\infty$, konvergující k libovolně předem zvolenému reálnému číslu, či řadu oscilující. To vyplývá z toho, že v relativně konvergentní řadě musí být součet všech kladných členů ∞ a součet všech záporných členů $-\infty$, a při tom musí členy samotné konvergovat k nule.

Příklad

Uvažme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots .$$

Příklad

Uvažme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots .$$

Nejprve si všimněte, že součet všech *kladných* členů je nekonečná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots = \infty,$$

která skutečně diverguje k ∞ (např. podle integrálního kritéria). A dále součet všech *záporných* členů je nekonečná řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2n}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \cdots = -\infty,$$

která skutečně diverguje k $-\infty$ (např. podle integrálního kritéria).

Příklad (pokr.)

Potom vhodným přeskládáním členů alternující harmonické řady lze získat nekonečnou řadu, která např. *diverguje k* ∞:

- Vezměme nejprve jeden kladný člen, tj. „součet“ je roven 1 $\boxed{\geq 1}$.
- Přidejme nyní jeden záporný člen a tolik kladných členů, aby byl součet $\boxed{\geq 2}$, tj. součet je pak

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{41} \approx 2.004063454 \geq 2.$$

  (K tomu je zapotřebí k té 1 přidat 20 kladných členů.)
- Potom přidejme další (druhý) záporný člen a tolik kladných členů, až je součet $\boxed{\geq 3}$.
- ...

Příklad (dokončení)

1. *konverguje* k předem zvolenému reálnému číslu: Zvolme si nejprve nějaké číslo $s \in \mathbb{R}$, ke kterému má přerovnaná řada konvergovat.
   - Nejprve vezměme tolik kladný členů, až je jejich součet $\geq s$.
   - Přidejme nyní tolik záporných členů, až je výsledný součet $\leq s$.
   - Přidejme nyní tolik dalších kladných členů, až je výsledný součet $\geq s$, ...

   Uvědomme si, že kladných či záporných členů je vždy dostatek, abychom překročili stanovenou hranici s, protože součet kladných členů je ∞ a součet záporných členů je $-\infty$.

Příklad (dokončení)

1. *konverguje* k předem zvolenému reálnému číslu: Zvolme si nejprve nějaké číslo $s \in \mathbb{R}$, ke kterému má přerovnaná řada konvergovat.
   - Nejprve vezměme tolik kladný členů, až je jejich součet $\geq s$.
   - Přidejme nyní tolik záporných členů, až je výsledný součet $\leq s$.
   - Přidejme nyní tolik dalších kladných členů, až je výsledný součet $\geq s$, ...

   Uvědomme si, že kladných či záporných členů je vždy dostatek, abychom překročili stanovenou hranici s, protože součet kladných členů je ∞ a součet záporných členů je $-\infty$. A protože přidáváme stále se (v absolutní hodnotě) zmenšující se členy, výsledný součet po takových krocích „přeskakuje“ zvolenou hodnotu s a současně se k číslu s nekonečně blíží. Současně tímto způsobem vyčerpáme všechny členy původní řady. Tedy takto přerovnaná řada konverguje právě k číslu s.
2. *osciluje mezi zvolenými* $a, b \in \mathbb{R}, a < b$: podobně jako výše.

Plán přednášky

Součin řad

Příklad

V tomto příkladu si ukážeme, že i když obě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergují, potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot b_n)$ konvergovat nemusí.
Uvažujme nekonečné řady, kde $a_n = b_n := (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Potom jsou příslušné nekonečné řady *konvergentní*, což plyne z Leibnitzova kritéria, zatímco řada součinů

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverguje k ∞.

Příklad

Na druhou stranu může nastat i situace, že takováto řada součinů $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cdot c_n)$ konverguje, přestože jedna z řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nekonverguje. Vezměme si např. řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

která *diverguje* k ∞, zatímco řada součinů

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cdot c_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

konverguje.