Drsná matematika III – 4. demonstrovaná cvičení
Násobné integrály

Martin Panák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

11.10. 2011

Plán přednášky

1. Domácí úlohy z minulého týdne
   - Příklad 1
   - Příklad 2
   - Příklad 3
2. Návodné úlohy
   - Těžiště tělesa
   - Povrch grafu reálné funkce $f(x, y)$ dvou proměnných x a y

Buď dáno zobrazení $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = xy \sin\left(\frac{\pi}{2}xy^2\right)$. Ukažte, že rovnost $F(x, y) = 1$ zadává v nějakém okolí bodu $[1, 1]$ implicitně funkci f jedné reálné proměnné tak, že $F(x, f(x)) = 1$. Určtete $f'(1)$.

Řešení. $F_y(1,1) = x \sin\left(\frac{\pi}{2}xy^2\right) + \pi x^2 y^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}xy^2\right)(1,1) = 1$, tedy předpis $F(x,y) = 1$ zadává implicitně na okolí bodu $(1,1)$ funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Řešení. $F_y(1,1) = x \sin\left(\frac{\pi}{2}xy^2\right) + \pi x^2 y^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}xy^2\right)(1,1) = 1$, tedy předpis $F(x,y) = 1$ zadává implicitně na okolí bodu $(1,1)$ funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Pro její derivaci potom platí

$$f'(x) = -\frac{F_x}{F_y}(1,1) = -\frac{1}{1} = -1.$$

□

Určete, zda existují maxima a minima funkce $f : (\mathbb{R}^+)^n \to \mathbb{R}$, $f(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$ za podmínky $x_1 + \cdots + x_n = c$, $c \in \mathbb{R}^+$, $x_1 > 0, \ldots, x_n > 0$.

Řešení. Normálový vektor k nadrovině definované podmínkou je $(1, \dots, 1)$. Extrém může nastat v bodech, kdy je gradient zkoumané funkce násobkem normály. Pro tyto body tedy dostáváme soustavu

$$\frac{1}{n}\sqrt[n]{x_1 \cdots \hat{x}_i \cdots x_n}\frac{1}{\sqrt[n]{x_i^{n-1}}} = k, \quad i = 1, \dots n.$$

Tato soustava má na zkoumané množině jediné řešení $x_1 = \cdots = x_n$, $k = 1$, což odpovídá maximu dané funkce. $\square$

Určete, zda existují maxima a minima funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = z - xy^2$ na elipsoidu

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = 1.$$

Pokud extrémy existují, určete je.

Řešení. Řešíme soustavu

$$\begin{aligned} x &= -ky^2 \\ y &= -2kxy \\ 2z &= k \end{aligned}$$

Z druhé rovnice dostáváme, že buď $y = 0$, nebo $x = -\frac{1}{2k}$. První možnost vede k bodům $(0, 0, \pm\sqrt{2}/2)$. Druhá pak nemůže být splněna (dosazením do rovnice koule dostaneme rovnici

$$\frac{1}{4k^2} + \frac{1}{2k^2} + k^2/2 = 1,$$

která nemá řešení. Ve dvou vypočtených bodech na dané sféře má funkce maximum, resp. minimum. $\square$

Plán přednášky

1. Domácí úlohy z minulého týdne
   - Příklad 1
   - Příklad 2
   - Příklad 3
2. Návodné úlohy
   - Těžiště tělesa
   - Povrch grafu reálné funkce $f(x, y)$ dvou proměnných x a y

Určete obsah plochy ohraničené parabolou $y = x^2$ a přímkou $y = x + 2$.

Určete ojem části prostoru splňující nerovnosti $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \geq 0$, $x + y + z \leq 1$.

Souřadnici z v těžiště tělesa T v $\mathbb{R}^3$ spočítáme jako

$$\frac{1}{V}\int_T z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde V je objem tělesa.

Souřadnici z v těžiště tělesa T v $\mathbb{R}^3$ spočítáme jako

$$\frac{1}{V}\int_T z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde V je objem tělesa.
Určete objem a těžiště tělesa ohraničeného paraboloidem $x^2+y^2=z$, válcem $x^2+y^2=2y$ a rovinou $z=0$.

Povrch grafu funkce dvou proměnných nad plochou S v rovině xy spočítáme jako

$$P = \int_S \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Povrch grafu funkce dvou proměnných nad plochou S v rovině xy spočítáme jako

$$P = \int_S \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Příklad 4. Určete obsah části pláště kužele $x^2 + y^2 = 3z^2$, která leží nad rovninou $z = 0$ a uvnitř válce $x^2 + y^2 = 4y$.