

Drsná matematika III – 5. demonstrovaná cvičení

Násobné integrály a diferenciální rovnice

Martin Panák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

18.10. 2011

Plán přednášky

- 1 Domácí úlohy z minulého týdne
 - Příklad 1
 - Příklad 2
 - Příklad 3

- 2 Návodné úlohy
 - Rovnice se separovanými proměnnými
 - Model změny teploty

Určete povrch tělesa vzniklého průnikem válců $x^2 + z^2 = 4$ a $x^2 + y^2 = 4$.

Určete povrch tělesa vzniklého průnikem válců $x^2 + z^2 = 4$ a $x^2 + y^2 = 4$.

Řešení.

$$S = 16 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{4}{\sqrt{4-x^2}} dy dx = 64.$$

□

Určete objem části prostoru dané nerovnostmi $x^2 + y^2 \leq 4$, $z \geq 0$
a $z \leq x + y + 1$.

Řešení. Těleso nejprve otočíme v záporném smyslu o 45° . Tím se nám změní pouze rovnice roviny: $z = \sqrt{2}x + 1$.

Dále těleso rozdělíme na část ležící nad výsečí kruhu o poloměru 2 ohraničenou úhly $\pm \arccos(-\sqrt{2}/4)$ (s objemem V_1 a na jehlan, který má podstavu trojúhelník o vrcholech $[-\sqrt{2}/2, \sqrt{7/2}]$, $[-\sqrt{2}/2, \sqrt{7/2}]$, $[0, 0]$ s objemem V_2 .



Určete objem a souřadnice těžiště komolého kužele o kruhových podstavách s poloměry $r_1 > r_2$ a výšce h .

Řešení. Nejprve spočítejme těžiště kužele s podstavou o poloměru r a výšce v . Otočíme-li kužel vrcholem dolů a ten umístíme do počátku souřadnic, pak ve válcových souřadnicích:

Řešení. Nejprve spočítejme těžiště kužele s podstavou o poloměru r a výšce v . Otočíme-li kužel vrcholem dolů a ten umístíme do počátku souřadnic, pak ve válcových souřadnicích:

$$V = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^r \int_{\frac{h}{r}\rho}^h \rho \, dz \, d\rho \, d\phi = \frac{1}{3} \pi h r^2.$$

Řešení. Nejprve spočítejme těžiště kužele s podstavou o poloměru r a výšce v . Otočíme-li kužel vrcholem dolů a ten umístíme do počátku souřadnic, pak ve válcových souřadnicích:

$$V = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^r \int_{\frac{h}{r}\rho}^h \rho \, dz \, d\rho \, d\phi = \frac{1}{3} \pi h r^2.$$

Těžiště zjevně leží na ose z . Pro z -tovou souřadnici pak máme

$$z = \frac{1}{V} \int_{\text{kužel}} z dV = \frac{4}{V} \int_0^{\pi/2} \int_0^r \int_{\frac{h}{r}\rho}^h z \rho \, dz \, d\rho \, d\phi = \frac{3}{4} h.$$

Těžiště tedy leží ve výšce $\frac{1}{4}h$ nad středem podstavy kužele. □

Plán přednášky

- 1 Domácí úlohy z minulého týdne
 - Příklad 1
 - Příklad 2
 - Příklad 3

- 2 Návodné úlohy
 - Rovnice se separovanými proměnnými
 - Model změny teploty

Vyřešte rovnici

$$y' + \frac{1 + y^2}{xy^2(1 + x^2)}.$$

Rychlost změny teploty tělesa je přímo úměrná rozdílu teploty tělesa a prostředí, které jej obklopuje. Uvařili jsme šálek zeleného čaje (o teplotě 80°C). Teplota čaje klesla v místnosti o teplotě 20°C za pět minut na 60°C . Za jak dlouho klesne teplota čaje na 40°C .